 ISSN 1984-820X

Restrições Críticas para o Atendimento de Demanda de Potência em Sistemas de Energia Elétrica

Luciano V. Barboza
Instituto Federal Sul-rio-grandense, Campus Pelotas – Universidade Católica de Pelotas
96015-360, Pelotas, RS
E-mail: luciano@cefetrs.tche.br

***Resumo**: Este estudo apresenta uma revisão sobre o máximo carregamento em sistemas de energia elétrica, tendo como foco a análise dos principais fatores que o limitam. O artigo visa a determinar quais barras do sistema elétrico mais influem na limitação do abastecimento das demandas. A abordagem utiliza o método do máximo carregamento em sistemas de potência modelado como um problema de otimização com restrições. A solução deste é realizada com a metodologia de Pontos Interiores. Como consequência da solução, os multiplicadores de Lagrange podem ser usados como parâmetros identificadores das regiões da rede elétrica que apresentam um "estrangulamento" para a transmissão da energia. O trabalho também apresenta um estudo sobre o relacionamento entre a função objetivo e os multiplicadores de Lagrange como parâmetros de sensibilidade no método de Pontos Interiores.*

I. Introdução

Nas últimas décadas, a estrutura dos sistemas de energia elétrica tem se tornado cada vez mais complexa. O principal objetivo na operação de uma rede de energia é utilizar plenamente os recursos disponíveis nesta. Além disso, parâmetros de segurança, confiabilidade e critérios de operação econômica também são balizadores que norteiam a operação do sistema elétrico. Assim, ter-se uma eficiente utilização dos equipamentos instalados no sistema, é o principal objetivo das indústrias de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. Artigos relacionados ao máximo carregamento [3][7] mostram que a utilização adequada dos recursos existentes no sistema é o diferencial em termos de transmissão da energia elétrica de uma forma mais segura, confiável e a um menor custo de geração e transmissão.

Por outro lado, a capacidade de transmissão de um sistema elétrico é geralmente limitada por vários fatores intrínsecos à própria rede e outros relacionados à operação desta. Entre estes, podem ser citados: magnitudes das tensões complexas nas barras do sistema, capacidade máxima de transmissão de potência em linhas de transmissão e transformadores, disponibilidade de geração de potência ativa nas centrais elétricas e um adequado suporte de potência reativa disponível na rede.

Para obter um ponto de operação ótimo para o sistema elétrico, baseado nos critérios anteriores, as técnicas matemáticas de otimização podem ser usadas. Elas estão propostas na literatura em várias abordagens [4][8]. As metodologias procuram modelar todos os controles e equipamentos componentes do sistema de energia de uma forma o mais confiável possível. Dessa forma, o problema do máximo carregamento de um sistema de energia elétrica fornecerá um ponto de operação onde todas as restrições operacionais e/ou de equipamentos estejam atendidas (satisfeitas).

Este trabalho formula o máximo carregamento como um problema de otimização. O modelo é solucionado utilizando o método não-linear de Pontos Interiores. Nesta metodologia, cada restrição da rede possui associada a si um multiplicador de Lagrange [1][2]. Estudos mostram que estes multiplicadores de Lagrange podem ser interpretados como parâmetros de sensibilidade entre a função objetivo e as restrições do problema [6]. Assim, ao final do processo iterativo de otimização, estas sensibilidades são obtidas a um custo zero, ou seja, elas são um subproduto do processo de otimização. Analisando os valores dos multiplicadores de Lagrange, pode-se observar quais limites são mais restritivos na limitação do máximo carregamento. Com estes dados, um plano de operação adequado pode ser elaborado de modo a possibilitar um aumento na transmissão de energia elétrica, de uma forma segura e confiável.

II. O Problema do Máximo Carregamento

O problema do máximo carregamento em uma rede elétrica pode ser enunciado por

$$\begin{aligned} & Max \;\; \rho \\ & s.a. \;\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\rho)=0 \\ & \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\rho)\geq 0 \\ & \qquad \rho \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

onde ρ é o fator que parametriza as demandas de potências ativa e reativa; $\boldsymbol{g}$ é o vetor com os desbalanços de potências ativa e reativa; $\boldsymbol{h}$ corresponde ao vetor com as restrições de desigualdade, como magnitudes das tensões complexas, taps dos transformadores, geração de potências ativa e reativa, capacidades de transmissão em linhas de transmissão e transformadores, ..., com os seus respectivos limites mínimos e máximos; $\boldsymbol{x}$ é o vetor contendo as variáveis de estado, que neste estudo corresponde a

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} & \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{a} & \rho \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

onde $\boldsymbol{V}$ é o vetor com as magnitudes das tensões complexas em todas as barras da rede elétrica; $\boldsymbol{\delta}$ é o vetor com os ângulos de fase das tensões complexas em todas as barras, exceto na barra de folga; e $\boldsymbol{a}$ é o vetor com os taps dos transformadores.

Os desbalanços de potências ativa e reativa em todas as barras do sistema de potência parametrizados pelo fator de carga ρ são

$$\begin{aligned} P_i(\boldsymbol{x}) + \left(P_{d0_i} + \rho\Delta P_{d_i}\right) = 0 \\ Q_i(\boldsymbol{x}) + \left(Q_{d0_i} + \rho\Delta Q_{d_i}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

onde $P(\boldsymbol{x})$ e $Q(\boldsymbol{x})$ são as injeções de potências ativa e reativa calculadas a partir do estado da rede; P_{d0} e Q_{d0} correspondem as demandas de potências ativa e reativa programadas (caso base); ΔP_d e ΔQ_d indicam as direções de crescimento das demandas de potências; e o subescrito i corresponde a todas as barras da rede elétrica.

A geração de potências ativa e reativa são um dos componentes do vetor $\boldsymbol{h}$. Neste estudo, estas restrições são tratadas como restrições funcionais e modeladas como

$$\begin{aligned} P_{G_j}(\boldsymbol{x},\rho) = P_j(\boldsymbol{x}) + \left(P_{d0_j} + \rho\Delta P_{d_i}\right) \\ Q_{G_j}(\boldsymbol{x},\rho) = Q_j(\boldsymbol{x}) + \left(Q_{d0_j} + \rho\Delta Q_{d_i}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

onde o subescrito j corresponde a todas as barras de geração do sistema elétrico.

Ao final do processo iterativo, o valor de ρ indica o máximo aumento nas demandas do sistema. Neste caso, estes valores podem ser determinados como

$$\begin{aligned} P_{d_k}^{max} = P_{d0_k} + \rho\Delta P_{d_k} \\ Q_{d_k}^{max} = Q_{d0_k} + \rho\Delta Q_{d_k} \end{aligned} \tag{5}$$

com a garantia de todas as restrições satisfeitas; e o subescrito k correspondendo às barras onde haja demanda de energia elétrica.

III. Solução via Metodologia de Pontos Interiores

Considere o problema geral de otimização a seguir.

$$\begin{aligned} &Max \;\; f(\boldsymbol{x}) \\ &s.a. \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ &\qquad\;\; \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

onde $f(x)$ é a função objetivo; ***g*** é o vetor com as restrições de igualdade; o vetor ***h*** contem as restrições de desigualdade; e o vetor ***x*** é o vetor com as variáveis de estado.

Aplicando a abordagem de Pontos Interiores [9] ao problema (6), obtem-se

$$\begin{aligned} &Max \;\; f(\boldsymbol{x}) + \mu \sum_i \ln s_i \\ &s.a. \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ &\qquad\;\; \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s} = 0 \\ &\qquad\;\; \boldsymbol{s} > 0 \end{aligned} \tag{7}$$

onde μ é o parâmetro barreira do método de Pontos Interiores; ***s*** é o vetor com as va-riáveis de folga; e o subescrito ***i*** se refere a todas as restrições de desigualdade originais.

A função Lagrangeana aumentada correspondente ao problema modificado (7) é

$$£(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\boldsymbol{x}) + \mu \sum_i \ln s_i - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\pi}^T \left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s} \right) \tag{8}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\pi}$ são vetores contendo os multiplicadores de Lagrange das restrições.

As condições de otimalidade de primeira ordem para a função Lagrangeana (8) são

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} £(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T \boldsymbol{\pi} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{s}} £(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \mu \boldsymbol{e} + \mathrm{S} \boldsymbol{\pi} = 0 \tag{10}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} £(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{11}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}} £(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s} = 0 \tag{12}$$

onde ∇ é o operador derivada parcial; ***e*** é um vetor com todos os seus elementos unitários; e **S** é uma matriz diagonal contendo as variáveis de folga.

Resolvendo o sistema de equações não-lineares (9)-(12), o valor ótimo para a função custo é obtido. Este sistema é resolvido usando o método de Newton-Raphson perturbado, assim chamado porque utiliza um controle de passo para as atualizações das variáveis e o parâmetro barreira μ é estimado, ao final de cada iteração.

IV. Relação entre o Valor da Função Objetivo e os Valores das Restrições

a) Restrições de Igualdade

A relação entre o valor da função custo e os valores das restrições de igualdade já é bem conhecida na literatura [5][6]. De acordo com [6], de certo modo, os multiplicadores de Lagrange quantificam a mudança no valor ótimo quando as restrições de igualdade são perturbadas, atuando como verdadeiros parâmetros de sensibilidade.

b) Restrições de Desigualdade

Considere o problema de otimização sujeito somente a restrições de desigualdade

$$\begin{aligned} &Max \;\; f(\boldsymbol{x}) \\ &s.a. \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \tag{13}$$

Com a abordagem de Pontos Interiores, a função Lagrangeana aumentada é

$$\pounds(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\pi}) = f(\boldsymbol{x}) + \mu\sum_i \ln s_i - \boldsymbol{\pi}^T \left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\beta}\right) \tag{14}$$

As condições de otimalidade de primeira ordem para a função Lagrangeana são

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \pounds(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\pi}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\pi} = 0 \tag{15}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{s}} \pounds(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\pi}) = \mu e + \mathrm{S}\boldsymbol{\pi} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \pounds(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\beta} = 0 \tag{17}$$

Neste ponto, é importante salientar que, como as restrições de desigualdade foram transformadas em restrições de igualdade pela adição das variáveis de folga, estas se tornam ativas ao final do processo iterativo no método de Pontos Interiores. Neste caso, a forma de verificar se a restrição de desigualdade original atingiu ou não algum de seus limites é através da análise do valor das variáveis de folga. Caso a variável de folga seja nula, indica que a restrição de desigualdade está ativa.

Derivando a função objetivo em relação aos limites das restrições, tem-se que

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left(\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)^T \tag{18}$$

Manipulando as equações (15), (17) e (18), conclui-se que

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left(\mathrm{U} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)^T \boldsymbol{\pi} = \left(\mathrm{U} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)^T\right)\boldsymbol{\pi} \tag{19}$$

que expressa a sensibilidade da função custo em relação aos limites das restrições de desigualdade. Note que estas sensibilidades não dependem apenas dos multiplicadores de Lagrange, mas também são influenciadas pelo valor das derivadas parciais das variáveis de folga em relação aos limites das restrições (sensibilidades de ***s*** em relação a ***β***).

V. Resultados Numéricos

Em relação à equação (19), é importante salientar que, após inúmeros testes, observou-se que os termos ${}^{\partial s}\!/_{\partial \beta}$ são muito pequenos. Isso na prática indica que estas sensibilidades não influem de maneira decisiva na sensibilidade da função objetivo em relação aos limites das restrições de desigualdade. Baseado nos experimentos práticos, a equação (19) pode ser simplificada para

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\pi} \tag{20}$$

de forma semelhante àquelas da função custo em relação aos limites das restrições de igualdade. Assim, neste estudo adotar-se-á os valores dos multiplicadores de Lagrange como relações de sensibilidade entre a função custo e os limites impostos à rede elétrica.

Os resultados foram obtidos a partir da aplicação do método proposto a sistemas do IEEE. As características das redes estão apresentadas na Tabela 1. Nesta tabela, *nb*, *nlt*, *nt* e *ng* correspondem, respectivamente, a números de barras, linhas de transmissão, transformadores e barras de geração nos sistemas elétricos. As duas últimas colunas apresentam as demandas totais previstas de potências ativa e reativa (caso base).

Sistema	*nb*	*nlt*	*nt*	*ng*	P_d^{tot} (MW)	Q_d^{tot} (Mvar)
IEEE-6	6	7	2	2	135,0	36,0
IEEE-118	118	179	9	34	4.125,0	1.439,0

Tabela 1: Características Principais das Redes Elétricas Testadas

a) IEEE-6 Barras

Aplicando a abordagem do máximo carregamento ao caso base do sistema IEEE-6, obtem-se as máximas demandas de potências ativa e reativa na rede, respectivamente, 148,7 MW e 39,7 Mvar. O valor do parâmetro de carga ρ vale 10,1. A simulação foi realizada de modo a manter constantes os fatores de potência em todas as barras de carga. As Tabelas 2 e 3 apresentam os valores dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

Barra	3	4	5	6
λ_P	37,7	28,9	63,6	54,2
λ_Q	57,3	55,5	112,8	107,5

Tabela 2: Multiplicadores de Lagrange – Restrições de Igualdade

Barra	1	2	3	5	6
V (pu)	1,1	1,1	0,95	0,95	0,95
π	375,8	226,9	43,1	146,5	276,3

Tabela 3: Multiplicadores de Lagrange – Restrições de Desigualdade

Analisando a Tabela 2, observa-se que, em termos de desbalanços de potências, a barra 5 é a mais crítica do ponto de vista do máximo carregamento. Os seus multiplicadores de Lagrange valem, respectivamente, 63,6 e 112,8 (são os maiores valores). Assim, para produzir um aumento no valor do fator de carga ρ é necessário realizar um ajuste nas demandas previstas para esta barra (corte de carga).

Na simulação, os limites de taps de transformadores e de geração de potências ativa e reativa não foram atingidos. Porém, nota-se que algumas magnitudes de tensão atingiram os seus limites (Tabela 3). Dessa tabela, observa-se que as barras 1 e 2 (barras de geração) atingiram os seus limites superiores, bem como as barras 3, 5 e 6 (barras de carga) alcançaram os seus limites inferiores. Em termos decrescentes, os limites mais restritivos são os das barras 1, 6, 5 e 3. Se estes limites puderem ser relaxados, isto implicará em um aumento de atendimento de demanda no sistema. Para ilustrar esta situação, testes foram realizados para determinar o aumento de carregamento causado pela relaxação destes. Nos testes, foi admitida uma relaxação de 1% nos limites superior e inferior das magnitudes de tensão. Por exemplo, no primeiro teste, o limite superior da tensão na barra 1 foi aumentado para 1,111 pu e um novo fluxo de potência ótimo foi realizado. No caso da barra 6, o seu limite inferior foi relaxado para 0,9405 pu. O procedimento foi efetuado também para as barras 2, 5 e 3. A Tabela 4 mostra os resultados obtidos para os novos valores do fator de carga ρ. A primeira linha da tabela se refere a qual barra teve o seu limite de tensão relaxado a cada simulação.

Barra	1	6	2	5	3
ρ	14,3	12,7	12,6	11,5	10,6

Tabela 4: Fatores de Carga com Relaxação de Limites de Tensão

Como era esperado, baseado nos multiplicadores de Lagrange π, nota-se que o maior incremento no fator de carga e, portanto na demanda total da rede, foi obtido no caso em que o limite superior da tensão na barra 1 foi relaxado. Observe ainda que uma relaxação de 1% neste limite acarretou um aumento no fator de carga de 41,6% (comparado com o caso base). Isto significou um aumento total de demandas de potências ativa e reativa de 148,7 MW e 39,7 Mvar para 154,3 MW e 41,1 Mvar (+3,7%).

b) IEEE-118 Barras

A abordagem também foi aplicada a um sistema de porte médio com 118 barras. Aplicado ao caso base, os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5. A segunda e terceira colunas da tabela referem-se aos valores totais máximos das demandas de potências ativa e reativa que podem ser supridos pela rede. O teste foi realizado de modo que as direções de crescimento das demandas foram ajustadas para manter o fator de potências das cargas constantes nas barras.

ρ	P_{sup}^{tot} **(MW)**	Q_{sup}^{tot} **(Mvar)**
53,93	6.349,6	2.215,7

Tabela 5: Máximo carregamento para o sistema IEEE-118

Da Tabela 5, verifica-se que é possível, a partir do caso base, um acréscimo de 53,93% nas demandas de potências da rede elétrica mantendo todos os limites operacionais e de equipamentos em segurança.

A Tabela 6 apresenta as maiores sensibilidades da função custo associadas aos desbalanços de potências nas barras de carga.

Barra	74	75	76	118
λ_P	9,7	10,3	31,2	20,7
λ_Q	20,6	24,2	75,0	48,4

Tabela 6: Maiores Sensibilidades Associadas aos Balanços de Potências

Com base na Tabela 6, nota-se que as barras 75, 76 e 118 são as mais críticas em termos de limitação do carregamento da rede (maiores multiplicadores de Lagrange).

Em relação às restrições de desigualdade, nenhum tap ou geração de potência reativa teve os seus limites atingidos. Por outro lado, a Tabela 7 mostra as principais restrições ativas para as gerações de potência ativa e para as magnitudes das tensões, com os seus correspondentes parâmetros de sensibilidade (multiplicadores de Lagrange).

Barra	24	69	72	73	76	80	88	98
P_G **(MW)**	—	—	100	100	—	—	—	—
π	—	—	0,14	0,27	—	—	—	—
V **(pu)**	1,1	1,1	1,05	—	0,95	1,1	1,05	1,05
π	16,1	349,9	182,6	—	817,6	371,3	29,5	43,0

Tabela 7: Maiores Sensibilidades para as Restrições de Desigualdade Ativas

Da Tabela 7, nota-se que os limites superiores de geração de potência ativa nas barras 72 e 73 são atingidos, embora pouca influência tenham no carregamento da rede elétrica (pequenos valores para os multiplicadores de Lagrange). Por outro lado, observa-se que as sensibilidades da função custo relacionadas com os limites de magnitude de tensão são bem mais consideráveis. O multiplicador de Lagrange associado ao limite inferior de tensão na barra 76 é o maior. Isto reforça a importância da barra 76 para estudos de máximo carregamento no sistema IEEE-118.

Como comprovação, os limites inferiores e superiores das magnitudes de tensão foram relaxados novamente em 1%, semelhante ao efetuado para o sistema IEEE-6. A Tabela 8 mostra os resultados das simulações com uma relaxação por vez.

Barra	24	69	72	76	80	88	98
ρ	54,1	57,8	55,8	61,1	54,5	54,1	54,0

Tabela 8: Valores do Parâmetro de Carga com Relaxação de Limites de Tensão

A Tabela 8 indica que o maior incremento no fator de carga ρ ocorre quando o limite inferior da magnitude da tensão na barra 76 é relaxado para 0,9405 pu, como esperado. Note que a relaxação de 1% neste limite implica em um acréscimo de demanda de 13,3%, isto é, o sistema elétrico pode ter as suas demandas totais de potências ativa e reativa aumentadas para 6.647,0 MW e 2.319,4 Mvar.

VI. Conclusões

O artigo apresentou uma revisão sobre o máximo carregamento de um sistema elétrico, modelado como um problema de otimização, e também um estudo sobre a influência das restrições operacionais sobre este máximo carregamento quando se resolve o problema através do método de Pontos Interiores.

A maior contribuição do estudo é ilustrar o fato de que os multiplicadores de Lagrange podem ser usados para avaliar a influência dos limites das restrições sobre o valor da função custo e que estes são obtidos sem nenhum custo computacional extra, sendo, em verdade, um subproduto do processo de otimização. Estas relações foram apresentadas e discutidas através da interpretação dos multiplicadores de Lagrange como parâmetros de sensibilidade. Os resultados numéricos obtidos a partir da aplicação da abordagem proposta a sistemas elétricos reforçam a metodologia e confirmam a possibilidade de utilização dos multiplicadores de Lagrange como fatores de sensibilidade.

Referências

[1] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya e Y. Zhang, On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 89, no. 3, pp. 507-541, (1996).

[2] L. V. Barboza, “Análise do Máximo Carregamento de Sistemas de Potência via Métodos de Pontos Interiores”, Dissertação de Mestrado, Centro Tecnológico/PPGEEL, UFSC, 1997.

[3] L. V. Barboza e R. Salgado, An Efficient Tap Control Applied to the Maximum Loadability of Electric Power Systems, em “IEEE/PES Transmission & Distribution Conference and Exposition: Latin America”, pp. 1-6, São Paulo, Brazil, 2004.

[4] A. Berizzi, C. Bovo, M. Innorta e P. Marannino, Multiobjective Optimization Techniques Applied to Modern Power System, em PES Winter Meeting, pp. 1503-1508, vol. 3, Columbus, USA, 2001.

[5] J. D. Buys e R. Gonin, The Use of Augmented Lagrangian Functions for Sensitivity Analysis in Nonlinear Programming, Journal on Mathematical Programming, vol. 12, no. 1, pp. 281-284, (1977).

[6] M. Gockenbach, Lagrange Multipliers and Sensitivity, Notas de aula. Disponível em http://www.math.mtu.edu/~msgocken/ma5630spring2003/lectures/sens/sens.pdf, (15/04/2009).

[7] G. D. Irisarri, X. Wang, J. Tong e S. Mokhtari, Maximum Loadability of Power Systems Using Interior Point Non-Linear Optimization Method, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 12, no. 1, pp. 162-172, (1997).

[8] J. W. Park, A Hybrid System Based Nonlinear Least Squares Optimization Applied to a Multi-Machine Power System Control, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol. E89-A, no. 11, pp. 3199-3206, (2006).

[9] Y. C. Wu, A. S. Debs e R. E. Marsten, A Direct Nonlinear Predictor Corrector Primal Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 9, no. 2, pp. 876-883, (1994).