 ISSN 1984-820X

Limites superiores em λ-colorações de cografos, grafos de permutação e grafos linha

Márcia R. Cerioli, **Daniel F. D. Posner**
Instituto de Matemática e COPPE/Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro
E-mails: cerioli@cos.ufrj.br, posner@cos.ufrj.br

Resumo: *O problema da L(2,1)-coloração, também conhecido por λ-coloração, consiste em, dado um grafo, atribuir cores (representadas por números naturais) aos seus vértices de forma que: se dois vértices são adjacentes, os seus rótulos tenham diferença de pelo menos dois; e se dois vértices têm um vértice em comum nas suas adjacências, os seus rótulos tenham valores diferentes. Este problema foi definido por Griggs e Yeh que também conjecturaram que para qualquer grafo existe uma λ-coloração utilizando no máximo a cor Δ^2 (onde Δ é o número máximo de arestas incidentes a algum vértice). Neste trabalho provamos limites superiores para as classes dos cografos, grafos de permutação e grafos linha, provando também a conjectura de Griggs e Yeh para as duas últimas.*

Palavras-chave: *Colorações em grafos, L(2,1)-coloração, Classes de grafos*

1 Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo, Δ o número máximo de arestas incidentes a algum vértice de G (o *grau* de G) e $dist(u, v)$ o número de arestas de um caminho mínimo entre os vértices u e v em G. Uma função $f : V(G) \to \{0, \ldots, k\}$ é uma λ-*coloração* de G se e somente se para cada par de vértices u e v em $V(G)$ em que $uv \in E(G)$ então $|f(u) - f(v)| \geq 2$ e para cada par de vértices u e v em $V(G)$ em que $dist(u, v) = 2$ então $f(u) \neq f(v)$. O problema da λ-coloração visa atribuir cores a todos os vértices do grafo utilizando o menor valor possível de k, neste caso temos uma λ-coloração *ótima* e $\lambda(G) = k$.

Esta variação de coloração dos vértices de um grafo foi introduzida por Griggs e Yeh [5] em 1992, onde os mesmos também conjecturaram que para qualquer grafo G, $\lambda(G) \leq \Delta^2$. Esta conjectura, ainda em aberto para grafos em geral, somente foi provada para algumas classes específicas de grafos, sendo este o problema mais estudado em relação as λ-colorações.

A motivação principal que levou ao estudo deste problema foi a de atribuição de freqüências de redes em transmissões via ondas de rádio. Onde esta rede é composta por torres que recebem e transmitem em determinadas freqüências (e correspondem a vértices no grafo) e têm-se como objetivo minimizar a interferência das transmissões de dados entre essas torres (cada transmissão entre as torres corresponde a uma aresta no grafo) utilizando o menor intervalo possível de freqüências. Se este problema for modelado como um problema de coloração de vértices de grafos, onde apenas vértices adjacentes têm cores diferentes, como ilustrado na figura 1, podem existir torres de transmissão enviando com a mesma freqüência para uma mesma torre, o que acaba acarretando em interferência na recepção destes dados. O problema da λ-coloração surgiu para realizar uma modelagem mais realista deste problema, já que utilizando esta variante da coloração, torres não enviam dados com a mesma freqüência para uma mesma torre em comum, como é ilustrado na figura 2.

Este problema vem sendo amplamente estudado por diversos pesquisadores, como pode ser visto nos trabalhos de Sakai [9], Chang e Kuo [3], Bodlaender et. al [1] e Kral [6]. Para mais informações sobre o problema, existe um *survey* feito por Calamoneri [2].

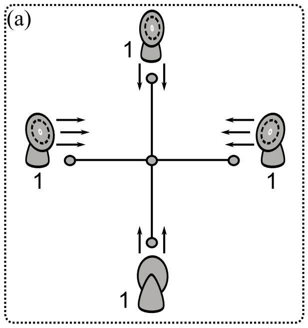

Figura 1: Modelagem com coloração

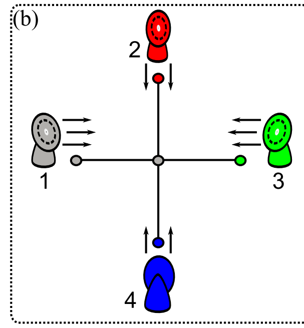

Figura 2: Modelagem com λ-coloração

Neste trabalho provamos limites superiores para $\lambda(G)$ onde G pertence a classe dos cografos, grafos de permutação e grafos linha. Com estes limites fica estabelecido que a conjectura de Griggs e Yeh [5] é válida para as duas últimas classes (para a classe dos cografos esta conjectura já havia sido provada por Chang e Kuo [3]). Além disso, estendemos estes resultados definindo as classes dos grafos p-componentes cografos e quase-linha, onde a conjectura se mantém válida.

Em geral, denotamos $n = |V(G)|$. Um grafo G *tem diâmetro 2* se $dist(u, v) \leq 2$ para todo $u, v \in V(G)$. Observe que se G tem diâmetro 2, então não é possível haver repetição de cores em uma λ-coloração de G. Um grafo G^c é o *complemento* de um grafo G se $V(G^c) = V(G)$ e $E(G^c) = (V \times V) \setminus (E(G) \cup \{vv \mid v \in V(G^c)\})$.

2 Cografos

O problema da λ-coloração restrito a esta classe foi estudado por Chang e Kuo [3], que apresentaram um algoritmo polinomial para encontrar uma λ-coloração ótima. Eles também estipularam um limite superior para λ em cografos de $n + pv(G^c) - 2$, onde $pv(G^c)$ corresponde ao número mínimo de caminhos disjuntos em que os vértices de G^c podem ser particionados.

Nesta seção é fornecido um limite superior alternativo ao desenvolvido por Chang e Kuo, onde este é dado por 2Δ. Este limite é interessante já que além de provar uma conjectura feita por Calamoneri [2] em relação aos grafos *threshold*, também fornece um limite em relação ao grau do grafo, que é o objetivo principal nos estudos em relação aos limites superiores em λ-colorações. Além disso, é definida a classe dos p-componentes cografos e é dada a prova da conjectura de Griggs e Yeh para valores limitados de p. Para o desenvolvimento destas provas são necessários as definições e os teoremas a seguir.

Dados dois grafos $H_1 = (V_{H_1}, E_{H_1})$ e $H_2 = (V_{H_2}, E_{H_2})$, com $V_{H_1} \cap V_{H_2} = \emptyset$, operação de *união* de H_1 e H_2, denotada por $H_1 \cup H_2$, resulta em um grafo $U = (V_U, E_U)$ tal que $V_U = V_{H_1} \cup V_{H_2}$ e $E_U = E_{H_1} \cup E_{H_2}$. A operação de *join* de H_1 e H_2, denotada por $H_1 \wedge H_2$, é o grafo $J = (V_J, E_J)$ tal que $V_J = V_{H_1} \cup V_{H_2}$ e $E_J = E_{H_1} \cup E_{H_2} \cup \{uv \mid u \in V_{H_1}$ e $v \in V_{H_2}\}$. Observe que $(H_1 \wedge H_2)^c = H_1^c \cup H_2^c$.

Um subgrafo induzido de um grafo G, por um conjunto de vértices $S \subset V$, é o subgrafo de G que possui como vértices, o conjunto S e, como arestas, as arestas de G que tenham ambos os extremos em S. Um grafo G é dito *perfeito* se, para todo subgrafo induzido H de G, $\chi(H) = \omega(H)$, onde $\omega(H)$ é o tamanho do maior subgrafo completo em H e $\chi(H)$ é o número mínimo de cores utilizadas em uma coloração dos vértices de H onde vértices adjacentes têm cores diferentes.

Um *cografo* é um grafo com apenas um vértice, ou um grafo obtido por uma ou mais operações de união e *join* de outros cografos. Um grafo *threshold* é um grafo com apenas um vértice, ou um grafo obtido por uma ou mais operações de união e *join* entre um grafo *threshold* e um vértice isolado. Logo todo grafo threshold é um cografo.

Teorema 2.1 (Lovász [8] - 1972) *Todo cografo G é perfeito e, portanto, $\chi(G) = \omega(G)$.*

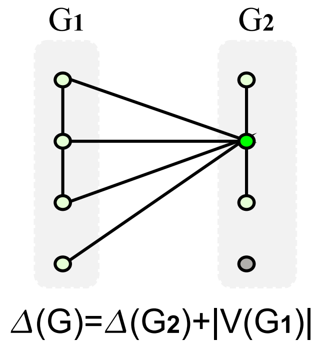

Figura 3: Obtenção do Δ de um cografo

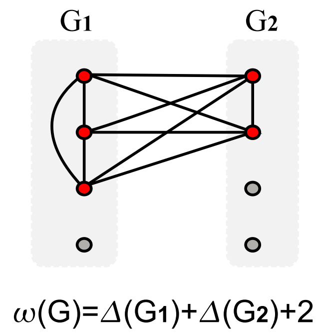

Figura 4: Obtenção de ω de um cografo

Teorema 2.2 (Griggs e Yeh [5] - 1992) *Para um grafo $G = (V, E)$, $\lambda(G) \leq |V(G)| + \chi(G) - 2$.*

Teorema 2.3 (Griggs e Yeh [5] - 1992) *Para um grafo completo K, $\lambda(K) = 2\Delta(K)$.*

Lema 2.1 *Para um cografo $G = (V, E) = G_1 \wedge G_2$, $n = |V(G)| \leq 2\Delta(G) - \Delta(G_1) - \Delta(G_2)$.*

Prova. A operação de *join* entre dois grafos torna todos os vértices de $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ adjacentes aos vértices de $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ e vice-versa. Então, $\Delta(G) = \max\{\Delta(G_1) + |V(G_2)|, \Delta(G_2) + |V(G_1)|\}$, como ilustrado na figura 3.

Logo $2\Delta(G) \geq \Delta(G_1) + \Delta(G_2) + |V(G_1)| + |V(G_2)|$. E, como $|V(G_1)| + |V(G_2)| = n$, então $n \leq 2\Delta(G) - \Delta(G_1) - \Delta(G_2)$. □

Teorema 2.4 *Para um cografo $G = (V, E) = G_1 \wedge G_2$, $\lambda(G) \leq 2\Delta(G)$.*

Prova. Como visto no teorema 2.2, $\lambda(G) \leq |V(G)| + \chi(G) - 2$. Pelo teorema 2.1, todo cografo é perfeito, tendo $\chi(G) = \omega(G)$. E, como foi provado no lema 2.1, $|V(G)| \leq 2\Delta(G) - \Delta(G_1) - \Delta(G_2)$. Então, $\lambda(G) \leq 2\Delta(G) - \Delta(G_1) - \Delta(G_2) + \omega(G) - 2$.

Em G, o maior subgrafo completo com tamanho $\omega(G)$ foi obtido a partir da operação de *join* dos cografos G_1 e G_2. Além disso, $\omega(G) \leq \Delta(G_1) + \Delta(G_2) + 2$, já que todo vértice de G_1 é adjacente a no máximo $\Delta(G_1)$ vértices e os de G_2 a $\Delta(G_2)$ vértices, todo par de vértices é adjacente em um subgrafo completo, e a operação de *join* de G_1 e G_2 não alterou as adjacências entre vértices de G_1 e nem entre vértices de G_2 (figura 4). Substituindo na inequação anterior, temos $\lambda(G) \leq 2\Delta(G)$. □

Desta forma, a seguinte conjectura é válida, com um limite igual a 2Δ. Além disso, pelo resultado seguinte, este limite não pode ser diminuído.

Conjectura 2.1 (Calamoneri [2] - 2006 (2009)) *Existe limite superior para λ melhor que $2\Delta + 1$ para a classe dos grafos threshold.*

Corolário 2.1 *O limite superior de 2Δ é justo para λ-colorações na classe dos cografos (e threshold).*

Prova. Como exemplo, podem ser fornecidos os grafos completos. Pelo teorema 2.3, sabe-se que para esta classe, $\lambda = 2\Delta$. E, todo grafo completo é um cografo (e um grafo *threshold*), já que pode ser obtido por uma sucessão de operações de *join* de vértices isolados. Com isso, fica provado que este limite superior é justo para a classe dos cografos (e também para a classe dos *threshold*). □

Um grafo G é *componente p-cografos* se os vértices de G podem ser particionados em p cografos conexos.

Teorema 2.5 *Para um grafo G componente p-cografos, $\lambda \leq p(2\Delta + 2) - 2$*

Prova. Particione o grafo G em p cografos conexos: $G_1, G_2, \ldots, G_p$. Pelo teorema 2.4, $\lambda(G_i) \leq 2\Delta(G_i)$, $1 \leq i \leq p$. Como em todo componente conexo de um cografo os vértices estão a distância 2 entre si, então estes precisam de cores diferentes em qualquer λ-coloração.

No pior caso, os p cografos têm todas as arestas possíveis entre seus vértices. Como em cada componente os vértices devem ter cores diferentes, estas arestas não adicionam nenhuma restrição entre vértices da mesma componente. Atribua as cores aos vértices de cada cografo G_i ($1 \leq i \leq p$) em seqüência, onde cada componente começa utilizando a última cor da anterior mais dois. Isto nos fornece uma λ-coloração para o grafo G, onde: $\lambda(G) \leq [\sum_{i=1}^{p}(2\Delta) + 2] - 2 = p(2\Delta + 2) - 2$. □

Corolário 2.2 *Para um grafo G componente p-cografos com $p \leq \frac{\Delta-1}{2}$, $\lambda \leq \Delta^2 - 3$*

Prova. Do teorema 2.5, $\lambda \leq p(2\Delta + 2) - 2$. E, como $p \leq \frac{\Delta-1}{2}$, pode-se afirmar que $\lambda \leq \frac{\Delta-1}{2}(2\Delta + 2) - 2 \leq \Delta^2 - 3$ □

3 Grafos de permutação

Nesta seção é provado limite superior de $4\Delta - 3$ para λ-colorações na classe dos grafos de permutação. Com isso, fica provado a conjectura de Griggs e Yeh [5] para esta classe. Antes deste resultado o melhor limite superior para esta classe era dado por $5\Delta - 2$, limite estabelecido por Bodlaender et al. [1].

Um grafo é *permutação* se existe uma permutação de $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ onde só há aresta entre dois vértices se o vértice de maior índice entre os dois aparecer antes na permutação. Uma *potência* de um grafo G é um grafo G^k, k natural, tal que $V(G^k) = V$ e $E(G^k) = \{xy \mid 1 \leq dist(x, y) \leq k\}$.

Como descrito por Kral e Skrekovski [6], em uma coloração com pesos de um grafo $G = (V, E)$ cada aresta e tem um peso $w(e)$ e vértices em que a aresta e é incidente têm cores com diferença pelo menos o valor $w(e)$. Eles denotaram por $\chi_w(G)$ o valor do menor tamanho de intervalo de cores necessárias para todos os vértices de um grafo G receberem cores e por $d_w(v)$ o somatório de todos os pesos das arestas incidentes ao vértice v de G, sendo $\Delta_w = \max_{v \in V(G)} \{d_w(v)\}$.

Teorema 3.1 (Golumbic [4] - 1980) *Um grafo G é de permutação se e somente se G é um grafo de interseção de segmentos de retas que conectam duas retas paralelas no plano.*

Teorema 3.2 (Griggs e Yeh [5] - 1992) *Existe uma λ-coloração que utiliza no máximo a cor 4 para grafos com $\Delta = 2$.*

Teorema 3.3 (Kral e Skrekovski [6] - 2003) *Para um grafo G, $\lambda(G) \leq \chi_w(G^2) - 1 \leq \Delta_w(G^2) - 1$, onde as arestas de G em G^2 tem pesos 2 e as arestas em G^2 que não pertencem a G tem peso 1.*

Teorema 3.4 *Para um grafo de permutação G, $\lambda(G) \leq 4\Delta - 3$.*

Prova. Pelo teorema 3.1, existe um modelo de interseção de segmentos de retas que conectam duas retas paralelas no plano. Seja v um vértice de G, os vértices adjacentes a v em G são segmentos que cruzam o segmento de v no modelo de interseção. Sejam Y o conjunto de vértices adjacentes a v em G cujos segmentos cruzam o segmento de v de cima para baixo, e X os que cruzam de baixo para cima, como ilustrado na figura 5.

Se X e $Y \neq \emptyset$, sejam eX e eY os conjuntos de vértices à distância 2 de v que se situam a esquerda no modelo de interseção e são adjacentes a vértices de X e de Y, respectivamente, e dX e dY os que se situam a direita, como ilustrado na figura 5. Em X existe vértice adjacente a

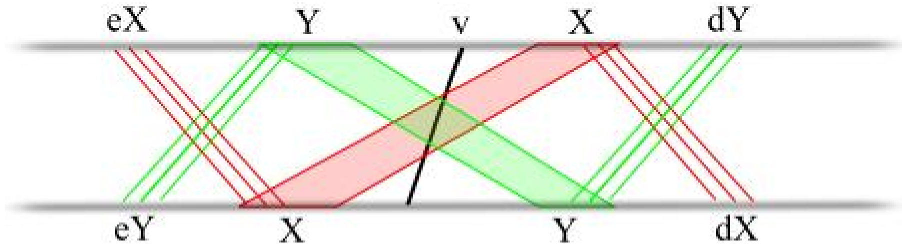

Figura 5: Modelo de interseção de um grafo de permutação

todos os em Y, a todos em eX e a v, e seu segmento é cruzado por no máximo Δ segmentos (o segmento mais a esquerda em X tem essa propriedade). Então, $|eX|+|Y|+1 \leq \Delta$. Analogamente $|eY|+|X|+1 \leq \Delta$, $|dX|+|Y|+1 \leq \Delta$, $|dY|+|X|+1 \leq \Delta$. Somando-se as quatro inequações, obtém-se o número de vértices que estão à distância 2 de v mais duas vezes o número de vértices que são adjacentes a v, $|eX|+|dX|+|eY|+|eY|+2|X|+2|Y| \leq 4\Delta-4$. Ou seja, $d_w(v) \leq 4\Delta-4$ e, pelo teorema 3.3, $\lambda \leq \chi_w(G^2)-1 \leq \Delta_w - 1 \leq 4\Delta-5$.

Se $Y = \emptyset$ e $X \neq \emptyset$, $|eX|+1 \leq \Delta$ e $|dX|+1 \leq \Delta$. Ou seja, $|eX|+|dX| \leq 2\Delta-2$ e, $d_w(v) \leq 2X+|eX|+|dX| \leq 4\Delta-2$. Então, pelo teorema 3.3, $\lambda \leq \chi_w(G^2)-1 \leq \Delta_w - 1 \leq 4\Delta-3$. □

Corolário 3.1 *A conjectura de Griggs e Yeh é válida para a classe dos grafos de permutação.*

Prova. No teorema 3.4 foi estabelecido o limite superior de $\lambda \leq 4\Delta-3$. Ou seja, para $\Delta \geq 3$ sempre existe cor para v em $\{0, \ldots, 4\Delta-3 \leq \Delta^2\}$, se for utilizado o método de atribuição de cores descrita. Para o caso em que $\Delta = 2$, pelo teorema 3.2, a conjectura é válida. □

4 Grafos linha

Definidos por Whitney [10], um grafo linha $H = L(G) = (V_L, E_L)$ de um grafo $G = (V, E)$ é tal que: toda aresta $e \in E$ corresponde a um vértice $v_L \in V_L$ e dois vértices são adjacentes em H se e somente se as arestas correspondentes aos vértices em G são incidentes a um mesmo vértice. Nesta seção é apresentado um limite superior para λ na classe dos grafos linha e é definida a classe dos grafos *quase-linha*, sendo provada em ambas a conjectura de Griggs e Yeh.

Teorema 4.1 (Krausz [7] - 1943) *Um grafo H é grafo linha se e somente se existe uma partição das arestas de H em subgrafos completos de tal modo que cada vértice apareça em no máximo dois subgrafos completos.*

Teorema 4.2 *Para qualquer vértice v de um grafo linha H, o número máximo de vértices à distância 2 de v é $\frac{\Delta^2}{2}$.*

Prova.

Considere a partição das arestas de H em subgrafos completos, definida por Krausz [7] no teorema 4.1. Cada vértice de H tem seu grau formado pelos, no máximo, dois subgrafos completos adjacentes. Com isso, $\Delta(H) \leq 2(\omega(H)-1)$, onde $\omega(H)$ é o tamanho do maior subgrafo completo de H.

Seja v um vértice com grau Δ coberto pelos subgrafos completos A e B com $|A| = a+1$ e $|B| = b+1$, então $a+b = \Delta$, como ilustrado na figura 6. Existem a vértices adjacentes a v pelo subgrafo completo A e b vértices adjacentes a v pelo subgrafo completo B. Cada vértice do subgrafo completo A diferente de v é adjacente a no máximo b vértices com distância 2 de v, isto porque cada um desses vértices já faz parte de um subgrafo completo com A vértices. Se fossem adjacentes a mais de b vértices, há uma contradição com o fato de que $a+b = \Delta$.

Existem ab vértices à distância 2 de v vindos do subgrafo completo A. Seguindo o mesmo raciocínio verifica-se que existem o mesmo número de vértices à distância 2 de v vindos do

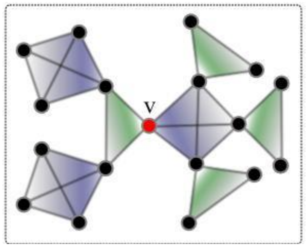

Figura 6: Grafo linha com grau 5

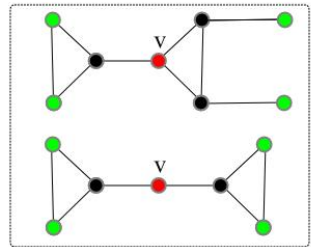

Figura 7: 4 vértices à distância 2

subgrafo completo B. Então existem no máximo $2ab$ vértices à distância 2 de v. Como $a = \Delta - b$, este número também é dado por $y = 2(\Delta - b)(b) = 2\Delta b - 2b^2$. Considere Δ fixo. O ponto y'_m máximo desta função é encontrado derivando $y = 2\Delta b - 2b^2$ em relação a b e igualando a zero. Com isto, esta valor é dado por $-4b + 2\Delta = 0$, ou seja, $b = \frac{\Delta}{2}$ e, como $a + b = \Delta$, então $a = \frac{\Delta}{2}$. Portanto, o número máximo de vértices à distância 2 de v será: $2ab \leq \frac{\Delta^2}{2}$. □

Teorema 4.3 *Para um grafo linha H, $\lambda(H) \leq \frac{\Delta^2+4\Delta-2}{2}$.*

Prova. Considere a abordagem utilizada por Kral e Skrekovski [6] do teorema 3.3. Como existem no máximo Δ vértices adjacentes e $\frac{\Delta^2}{2}$ vértices à distância 2 de qualquer vértice em H, $\Delta_w(H^2) \leq 2\Delta + \frac{\Delta^2}{2}$. E, como descrito no teorema 3.3, $\lambda(H) \leq \chi_w(H^2) - 1 = \Delta_w - 1 \leq \frac{\Delta^2}{2} + 2\Delta - 1$. □

Corolário 4.1 *Para um grafo linha H com $\Delta \geq 2$, $\lambda(H) \leq \Delta^2$.*

Prova. Para $\Delta \geq 4$, tem-se $\lambda(H) \leq \frac{\Delta^2}{2} + 2\Delta - 1 \leq \Delta^2$. Já que $\Delta^2 - 4\Delta + 2 \geq 0$ para todo $\Delta \geq 4$. E, para $\Delta = 2$, pelo teorema 3.2, tem-se $\lambda(H) \leq \Delta^2$.

Para $\Delta = 3$, em um vértice v de H o número máximo de vértices à distância 2 de v é 4, como ilustrado na figura 7. Pelo teorema 3.3, como $\Delta_w(H^2) \leq 2\Delta + 4 = 6 + 4 = 10$, então $\lambda(H) \leq \chi_w(H^2) - 1 \leq \Delta_w(H^2) - 1 = 9 = \Delta^2$. □

Teorema 4.4 *O limite superior para λ-colorações na classe dos grafos linha é $\Theta(\Delta^2)$.*

Prova. Seja $H = L(K_n)$ o grafo linha de um grafo completo K_n. Então $|V(H)| = |E(K_n)| = \frac{n^2-n}{2}$, $\Delta(H) = 2n-4$ (cada aresta em K_n é adjacente a outras $2n-4$ arestas) e H tem diâmetro 2, isto porque o grafo é completo, sendo toda aresta $e \in K_n$ adjacente ou à distância 2 de outra aresta em K_n. Com isso, $\lambda(H) \geq \frac{n^2-n}{2} - 1 = \frac{(\frac{\Delta+4}{2})^2 - (\frac{\Delta+4}{2})}{2} - 1 = \frac{\Delta^2+6\Delta+8}{8}$. Ou seja, o limite superior $\lambda(G)$ para a classe dos grafos linha é $\frac{\Delta^2+6\Delta+8}{8} \leq \lambda(G) \leq \frac{\Delta^2+4\Delta-2}{2}$. □

Um grafo Q é *quase-linha* se for possível adicionar arestas em Q de forma que o grafo resultante H seja grafo linha com $\Delta(H) = \Delta(Q) + p$, onde $\frac{\Delta(H)^2+4\Delta(H)-2}{2} \leq \Delta(Q)^2$. Isto é, há um limite máximo em quanto o grau de Q pode aumentar em relação ao grau do grafo linha produzido.

Teorema 4.5 *Para um grafo quase-linha Q com $0 \leq p \leq \frac{\Delta(Q)-2-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, $\lambda(Q) \leq \Delta^2$.*

Prova. Seja $p \leq \frac{\Delta(Q)-2-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ e H o grafo linha obtido a partir de Q adicionando arestas de forma que $\Delta(H) = \Delta(Q) + p$. Logo $\lambda(Q) \leq \lambda(H)$.

Mas, pelo teorema 4.3, $\lambda(H) \leq \frac{\Delta(H)^2+4\Delta(H)-2}{2} = \frac{(\Delta(Q)+p)^2+4(\Delta(Q)+p)-2}{2} \leq \Delta(Q)^2$. Portanto, $\lambda(Q) \leq \Delta(Q)^2$. □

Por exemplo, valores de p para grafos quase-linha Q com $\Delta(Q) = 100$: $0 \leq p \leq \lfloor \frac{100-2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \rfloor = 39$. Ou seja, se for possível transformar um grafo quase-linha Q com $\Delta(Q) = 100$ em um grafo linha H adicionando arestas de forma que $\Delta(H) \leq 139$, então $\lambda(Q) \leq \Delta(Q)^2$.

5 Conclusões

Neste artigo são apresentadas provas de limites superiores para o valor de $\lambda(G)$ quando G pertence a classe dos cografos, grafos de permutação e grafos linha. Com isso, foi provada a conjectura de Griggs e Yeh para as duas últimas classes, sendo realizado mais um passo em direção a prova desta conjectura para grafos em geral. Além disso, são definidas duas novas classes de grafos denotadas por p-componente cografos e quase-linha, para as quais a conjectura também é válida. Fica em aberto, e continua nos objetivos dos autores, encontrar um exemplo de grafo de permutação que tenha o valor de λ igual, ou mais próximo do limite superior encontrado, como no caso dos cografos.

6 Agradecimentos

Este trabalho conta com o financiamento da CAPES, CNPq e FAPERJ, sob a forma de projetos de pesquisa e colaboração. O autor Daniel Posner recebeu bolsa de mestrado do CNPq.

Referências

[1] Bodlaender, H.L, T. Kloks, R. B. Tan e J. van Leeuwen, Approximations for λ-coloring of graphs, *The Computer Journal*, 47 (2004), 193-204.

[2] Calamoneri, T., The $L(h,k)$-Labelling Problem: A Survey and Annotated Bibliography, *The Computer, Journal*, 49 (2006), 585-608. [versão atualizada (2009) em http://www.dsi.uniroma1.it/˜ calamo/survey.html]

[3] Chang, G. J. e D. Kuo , The $L(2,1)$-labeling problem on graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9 (1996), 309-316.

[4] Golumbic, M., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, San Diego, 1980.

[5] Griggs, J. R. e R. K. Yeh, Labelling graphs with a condition at distance 2, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5 (1992), 586-595.

[6] Kral, D. e R. Skrekovski, A theorem about the channel assignment problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16 (2003), 426-437.

[7] Krausz, J., Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les résaux, *Mat. Fiz. Lapok*, 50 (1943), 75-85.

[8] Lovász, L., Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Mathematics*, 2 (1972), 253-267.

[9] Sakai, D., Labeling chordal graphs: distance two condition, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7 (1994), 133-140.

[10] Whitney, H., Congruent graphs and the connectivity of graphs, *American Journal of Mathematics*, 54 (1932), 150-168.