

## Esquema de Discretização para Método de Volumes Finitos

### Paulo C. Oliveira

Departamento de Engenharia Rural - CCA - UFES  
Alto Universitário, s/n, Alegre-ES, CEP 29500-000  
e-mail: [pacololiveira@yahoo.com.br](mailto:pacololiveira@yahoo.com.br)

### Carlos F. Loeffler Neto

Departamento de Engenharia Mecânica - UFES  
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória, ES, CEP 29075-910  
e-mail: [carlosloeffler@bol.com.br](mailto:carlosloeffler@bol.com.br)

### Ricardo A. Mazza

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento Energia  
Caixa Postal 6122, Campinas – SP, CEP 13083-970  
e-mail: [mazza@fem.unicamp.br](mailto:mazza@fem.unicamp.br)

### Marcos S. N. Cardoso

Departamento de Engenharia Rural - CCA - UFES  
Alto Universitário, s/n, Alegre-ES, CEP 29500-000  
e-mail: [kvneves@yahoo.com.br](mailto:kvneves@yahoo.com.br)

**Resumo:** *Este trabalho esta inserido no projeto “Desenvolvimento da formulação quase-dual do método dos elementos de contorno em problemas de propagação de ondas: análise das condições de completitude na seqüência de funções radiais e implementação de um esquema iterativo de solução”, realizado pela UFES com financiamento da PETROBRAS. Nele, um novo esquema de discretização utilizando o método de volumes finitos chamado FLUX3 foi deduzido e aplicado a vários problemas físicos governados pela equação de transporte em casos que incluíram o termo transiente e termos difusivos sob campos de velocidade uni e bidimensionais. Os resultados são apresentados sob a forma de comparações gráficas e mostram desempenho superior quando comparado ao esquema exponencial.*

**Introdução:** O presente trabalho tem como objetivo, desenvolver um esquema de discretização para o método de volumes finitos, obtendo desta forma, adequado nível de precisão na simulação de problemas físicos, sem que sejam necessárias malhas refinadas. Com isto, diminui-se esforço computacional naqueles problemas onde, a combinação de um domínio com grandes dimensões e esquemas de discretização tradicionais, faz com que o número de incógnitas seja tão elevado, que torna obrigatória a utilização de computadores de alto desempenho.

Dentre os esquemas de discretização usados em volumes finitos, o Exponencial ou Power-Law descrito em Patankar [5] ocupa lugar de destaque na comunidade científica devido à sua simplicidade. Varejão [8] modificou o esquema Power-Law, admitindo uma variação linear do fluxo total da variável dependente em cada volume de controle e não entre os nós. Esta estratégia gerou um perfil interpolante denominado Flux-Spline, que produz erros expressivamente menores que o esquema tradicional para todos os problemas teste abordados. Oliveira [4] mostrou a superioridade do esquema Flux-Spline quando comparado ao tradicional Power-Law para problemas de convecção natural em cavidades fechadas.

Seguindo o caminho aberto pelo trabalho de Varejão [8], Nieckele [3] utilizou um polinômio de terceira ordem como perfil interpolante para os fluxos total e mássico. Este esquema batizado de FLUX33 apresentou vantagens significativas na resolução de uma série de problemas teste, quando comparados a outros dezesseis esquemas da literatura, entre eles, QUICK, LOADS e SUDS.

Da análise dos resultados de [3], [4] e [8], este autor percebeu a possibilidade de desenvolver um esquema de discretização mais simples que o esquema FLUX33, partindo da hipótese de que em cada volume de controle, o fluxo de massa é constante e o fluxo total varia cubicamente. Neste caso, o esquema pode ser deduzido como uma extensão dos esquemas Exponencial e Flux-Spline e os coeficientes envolvidos conterão apenas funções do número de Peclet.

Neste trabalho, todas as equações serão utilizadas na forma conservativa, tendo em vista resultados da literatura como Popescu [6] e Cossley [1] que mostram com exemplos e casos teste, o mau comportamento de formulações e discretizações não conservativas.

**Derivação do esquema de discretização FLUX3 para volumes finitos:** O transporte de uma quantidade escalar  $\varphi$  na presença de uma fonte denominada  $S^\varphi$  é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\varphi) + \nabla \cdot \vec{J} = S^\varphi \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

Em regime permanente, admitindo que o campo de velocidades  $\rho \vec{V}$  seja conhecido e satisfaça a equação (2), o problema passa a ser a resolução da equação (1) na forma:

$$\frac{\partial J}{\partial X} = S^\varphi \quad (3)$$

O fluxo total  $J$  na direção  $X$  da variável dependente  $\varphi$  é definido por:

$$J = \rho U \cdot \varphi - \Gamma^\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} \quad (4)$$

Onde  $\Gamma^\varphi$  é o coeficiente de difusão da variável dependente  $\varphi$  e  $\rho U$  o campo de velocidade na direção  $X$ .

O esquema de discretização proposto é construído pela idéia de impor-se na interface entre dois volumes de controle, a continuidade da variável dependente  $\varphi$ , do seu fluxo  $J$  e suas derivadas  $J'$  e  $J''$ . Para isso, admite-se que o fluxo total possa variar na direção  $X$  de forma cúbica, sob a seguinte expressão:

$$J = A_i \cdot (\eta^3 - \eta^2) + B_i \cdot (\eta^2 - \eta) + C_i \cdot \eta + D_i \quad (5)$$

Onde:

$$\eta = X_i / \Delta X_i; \quad D_i = J_i; \quad C_i = (J_{i+1} - J_i);$$

$$B_i = (J_{i+1} - J_i) - J'_i \cdot \Delta X_i \quad \text{e} \quad A_i = (J'_{i+1} + J'_i) \cdot \Delta X_i - 2 \cdot (J_{i+1} - J_i)$$

A fim de simplificar a dedução do caso geral, se iniciará a dedução do esquema por um problema puramente difusivo. Neste caso,  $\rho U$  é igual à zero, satisfazendo a equação da continuidade. Obtém-se da igualdade entre as equações (4) e (5) num volume de controle  $i$ :

$$-\Gamma_i^\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} = A_i \cdot (\eta^3 - \eta^2) + B_i \cdot (\eta^2 - \eta) + C_i \cdot \eta + D_i \quad (6)$$

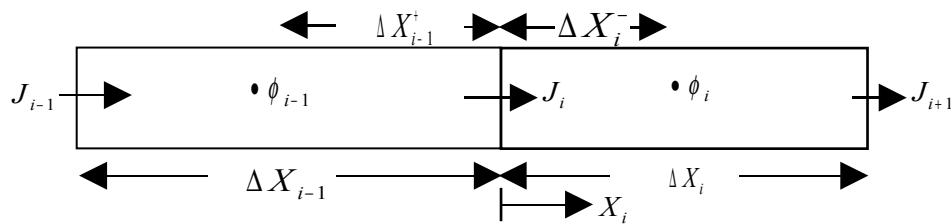


Figura 1. Discretização unidimensional para volumes

A solução da equação diferencial (6) para o volume de controle  $i$  mostrado na Figura 1, assumindo-se o coeficiente  $\Gamma_i^\varphi$  constante dentro do volume de controle, fornece o perfil interpolante para difusão pura:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{A_i}{-\Gamma_i^\varphi} \cdot \left( (1/4) \cdot \frac{X_i^4}{\Delta X_i^3} - (1/3) \cdot \frac{X_i^3}{\Delta X_i^2} \right) + \frac{B_i}{-\Gamma_i^\varphi} \cdot \left( (1/3) \cdot \frac{X_i^3}{\Delta X_i^2} - (1/2) \cdot \frac{X_i^2}{\Delta X_i} \right) \\ & + \frac{C_i}{-\Gamma_i^\varphi} \cdot \left( (1/2) \cdot \frac{X_i^2}{\Delta X_i} \right) + \frac{D_i}{-\Gamma_i^\varphi} \cdot (1.0) \cdot X_i + C_{vci} \end{aligned} \quad (7)$$

Com a condição de contorno,  $\varphi(X_i = \Delta X_i^-) = \varphi_i$ , obtém-se o valor da constante de integração para o volume de controle i:

$$C_{vci} = A_i \cdot \left( \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i^\phi} \cdot \eta_{mi} \cdot \frac{(1/2)}{(1.0)} \right) \cdot \left( \frac{(1/4)}{(1/2)} \cdot \eta_{mi}^2 - \frac{(1/3)}{(1/2)} \cdot \eta_{mi} \right) + B_i \cdot \left( \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i^\phi} \cdot \eta_{mi} \cdot \frac{(1/2)}{(1.0)} \right) \cdot \left( \frac{(1/3)}{(1/2)} \cdot \eta_{mi} - 1 \right) + C_i \cdot \left( \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot \eta_{mi} \cdot \frac{(1/2)}{(1.0)} \right) + D_i \cdot \frac{(1.0) \cdot \Delta X_i^-}{\Gamma_i} + 1 \cdot \phi \quad (8)$$

Onde  $\eta_{mi} = \Delta X_i^- / \Delta X_i$ .

Adotando um procedimento análogo no volume de controle (i-1) mostrado na Figura 1, obtém-se uma equação similar à (7). Para a obtenção da expressão dos fluxos, impõe-se a condição de continuidade para a variável dependente  $\varphi$ , na interface entre os volumes de controle i e (i-1). Ou seja:

$$\phi(X_i = 0) = \phi(X_{i-1} = \Delta X_{i-1}) \quad (9)$$

A condição (9) é a pedra angular do esquema, pois garante a continuidade da função  $\varphi$ , de sua derivada primeira, de seu fluxo  $J$  e das derivadas dos fluxos  $J'$  e  $J''$ . Após a substituição das expressões de  $\varphi$  na interface dos volumes de controle em (9), obtém-se a expressão para os fluxos:

$$J_i = DJ_i \cdot [1 \cdot \varphi_{i-1} - 1 \cdot \varphi_i] + J3hat_i \quad (10)$$

Onde;

$$J3hat_i = BJ_i (\alpha_{pi} \cdot A_i + \beta_{pi} \cdot B_i - C_i) + CJ_i (\alpha_{mi} \cdot A_{i-1} + \beta_{mi} \cdot B_{i-1} + C_{i-1}) ;$$

$$DJ_i = \frac{1}{\left( \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot \frac{1}{(1.0)} + \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot \frac{1}{(1.0)} \right)} ;$$

$$BJ_i = DJ_i \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot \eta_{mi} \cdot \frac{(1/2)}{(1.0)} ;$$

$$CJ_i = DJ_i \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot \eta_{pi-1} \cdot \frac{(1/3)}{(1.0)} ;$$

$$\alpha_{pi} = \frac{(1/3)}{(1/2)} \cdot \eta_{mi} - \frac{(1/4)}{(1/2)} \cdot \eta_{mi}^2 ;$$

$$\beta_{pi} = 1 - \frac{(1/3)}{(1/2)} \cdot \eta_{mi} ;$$

$$\alpha_{mi} = 1 - 2 \cdot \frac{(1/3)}{(1/2)} \cdot \eta_{pi-1} + \frac{(1/3)}{(1/2)} \cdot \eta_{pi-1}^2 ;$$

$$\beta_{mi} = 1 - \frac{(1/3)}{(1/2)} \cdot \eta_{pi-1} ;$$

$$\eta_{pi-1} = \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Delta X_{i-1}}$$

Os números entre parêntesis nas expressões acima, são os limites das funções do número de Peclet da célula, para um campo de velocidade nulo.

Impondo-se a condição de continuidade de derivadas na equação (5), obtém-se para os volumes de controle interiores, ou seja,  $3 \leq i \leq ifin$ , o seguinte sistema de equações para as derivadas dos fluxos  $J'_i$ :

$$\frac{J'_{i-1}}{\Delta X_{i-1}} + 2 \cdot \left( \frac{1}{\Delta X_i} + \frac{1}{\Delta X_{i-1}} \right) \cdot J'_i + \frac{J'_{i+1}}{\Delta X_i} = 3 \cdot \left[ \frac{(J_{i+1} - J_i)}{\Delta X_i} + \frac{(J_i - J_{i-1})}{\Delta X_{i-1}} \right] \quad (11)$$

Assumindo um perfil parabólico para o fluxo  $J_i$  no volume de controle dois, na fronteira à esquerda e no volume de controle ifin, na fronteira à direita, obtém-se:

$$J'_2 = 2 \cdot \frac{(J_3 - J_2)}{\Delta X_2} - J'_3 \quad (12)$$

$$J'_{ifm+1} = 2 \cdot \frac{(J_{ifm+1} - J_{ifm})}{\Delta X_{ifm}} - J'_{ifm} \quad (13)$$

Considerando-se os fluxos  $J$  nas faces e o termo fonte  $S^\varphi$  constantes, a integração por volumes finitos da equação de governo (3) é de acordo com Patankar [5]:

$$J_{i+1} - J_i = Sc_i^\varphi \cdot \Delta X_i + Sp_i^\varphi \cdot \varphi_i \cdot \Delta X_i \quad (14)$$

Substituindo a expressão (10) deduzida para o fluxo  $J_i$  em (14), obtém-se:

$$\begin{aligned} AP_i \cdot \varphi_i &= AIM_i \cdot \varphi_{i-1} + AIP_i \cdot \varphi_{i+1} + CON_i \\ AIM_i &= DJ_i \\ AIP_i &= DJ_{i+1} \\ AP_i &= AIM_i + AIP_i - Sp_i^\varphi \cdot \Delta X_i \\ CON_i &= Sc_i^\varphi \cdot \Delta X_i - DIV3hat_i \\ DIV3hat_i &= J3hat_{i+1} - J3hat_i \end{aligned} \quad (15)$$

**Esquema FLUX3 para Convecção-Difusão Unidimensional:** Neste caso, o vetor  $\rho U_i$  será postado nas faces dos volumes de controle como feito anteriormente para o fluxo  $J_i$  e suas derivadas. Assim, obtém-se a seguinte equação diferencial para um volume de controle i:

$$\rho U_i \cdot \varphi - \Gamma_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} = A_i \cdot (\eta^3 - \eta^2) + B_i \cdot (\eta^2 - \eta) + C_i \cdot \eta + D_i \quad (16)$$

A resolução desta equação diferencial, adotando-se dedução semelhante àquela mostrada no caso difusivo, e utilizando-se as equações (1) e (2), dará origem ao sistema de equações algébricas definido num caso transiente por:

$$\begin{aligned} AP_i \cdot \varphi_i &= AIM_i \cdot \varphi_{i-1} + AIP_i \cdot \varphi_{i+1} + CON_i \\ AIM_i &= DJ_i \cdot e^{+Pe_i^+} \\ AIP_i &= DJ_{i+1} \cdot e^{-Pe_i^-} \\ AP_i &= AIM_i + AIP_i - Sp_i^\varphi \cdot \Delta X_i + AP_i^0 \\ CON_i &= Sc_i^\varphi \cdot \Delta X_i - DIV3hat_i + AP_i^0 \cdot \varphi_i^0 \\ DIV3hat_i &= J3hat_{i+1} - J3hat_i \end{aligned} \quad (17)$$

Onde  $\varphi_i^0$  é o valor de  $\varphi_i$  no tempo  $\tau$  anterior,  $AP_i^0 = \rho_i^0 \cdot \frac{\Delta X_i}{\Delta \tau}$  e os números de Peclet nas células à direita e à esquerda da interface comum são:

$$Pe_i^+ = \frac{\rho U_i \cdot \Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \quad (18)$$

$$Pe_i^- = \frac{\rho U_i \cdot \Delta X_i^-}{\Gamma_i} \quad (19)$$

**Discretização para Caso Multidimensional:** O conjunto de equações deduzido anteriormente para convecção-difusão, é adequado para o caso unidimensional. Entretanto, para casos multidimensionais, a hipótese de considerar os fluxos constantes nas faces dos volumes de controle, como foi feito na obtenção da equação (14) produz erros de ordem igual ou superior àqueles gerados pelo perfil interpolante.

Nieckele [3] propôs que a derivada dos fluxos, calculada no ponto onde se localiza a variável dependente  $\varphi$  no volume de controle, fosse usada como correção, quando da integração da equação de governo. Para um caso bidimensional, significa admitir a seguinte igualdade:

$$\left( \frac{\partial J_x}{\partial X} + \frac{\partial J_y}{\partial Y} \right)_{i,j} = Jx'_{\Delta X_i^-, Y_j} + Jy'_{X_i, \Delta Y_j} \quad (20)$$

A hipótese descrita por (20) conduz à:

$$\int_{VC_{i,j}} \left( Jx'_{\Delta X_i^-, Y_j} + Jy'_{x_i, \Delta Y_j^-} \right) dX \cdot dY = \left( Jx'_{\Delta X_i^-, Y_j} \right) \Delta X_i \Delta Y_j + \left( Jy'_{x_i, \Delta Y_j^-} \right) \Delta X_i \quad (21)$$

Pode-se afirmar então que existe um fator de correção nos volumes de controle, tal que:

$$\left( Jx_{i+1,j} - Jx_{i,j} \right) \cdot \Delta Y_j + \left( Jy_{i,j+1} - Jy_{i,j} \right) \cdot \Delta X_i + Surf_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j = \left[ \left( Jx'_{\Delta X_i^-, Y_j} \right) + \left( Jy'_{x_i, \Delta Y_j^-} \right) \right] \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \quad (22)$$

Onde  $Surf_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j$  é a correção para este tipo de perfil interpolante, em cada volume de controle. O desenvolvimento algébrico de (22) utilizando a derivada do perfil cúbico (5) em cada direção coordenada, conduz à:

$$Surf_{i,j} = \left[ Ax_{i,j} \cdot \left( 3 \cdot \eta_{mi}^2 - 2 \cdot \eta_{mi} \right) + Bx_{i,j} \cdot \left( 2 \cdot \eta_{mi} - 1 \right) \right] \cdot \Delta Y_j + \left[ Ay_{i,j} \cdot \left( 3 \cdot \eta_{mj}^2 - 2 \cdot \eta_{mj} \right) + By_{i,j} \cdot \left( 2 \cdot \eta_{mj} - 1 \right) \right] \cdot \Delta X_i \quad (23)$$

Onde:

$$\begin{aligned} Ax_{i,j} &= \left( Jx'_{i+1,j} + Jx'_{i,j} \right) \cdot \Delta X_i - 2 \cdot \left( Jx_{i+1,j} - Jx_{i,j} \right); & Bx_{i,j} &= \left( Jx_{i+1,j} - Jx_{i,j} \right) - Jx'_{i,j} \cdot \Delta X_i \\ Ay_{i,j} &= \left( Jy'_{i,j+1} + Jy'_{i,j} \right) \cdot \Delta Y_j - 2 \cdot \left( Jy_{i,j+1} - Jy_{i,j} \right); & By_{i,j} &= \left( Jy_{i,j+1} - Jy_{i,j} \right) - Jy'_{i,j} \cdot \Delta Y_j \\ \eta_{mi} &= \Delta X_i^- / \Delta X_i; & \eta_{mj} &= \Delta Y_j^- / \Delta Y_j \end{aligned}$$

**Problemas teste:** A seguir, para fins de análise e comparação do esquema descrito anteriormente, usaremos os esquemas FLUX3 e Exponencial em quatro problemas teste.

**Problema teste 1:** O problema se caracteriza pela simulação do transporte de um pulso, por um campo de velocidade constante, sem a presença de termos dissipativos.

A condição inicial é definida por  $\varphi(X, \tau = 0) = 1 + e^{-(X-2)^2 \cdot 70}$ , sendo o domínio espacial igual  $0 \leq X \leq 6$ ,  $\rho = U = 1$ , a malha empregada foi de 192 volumes de controle por 1500 passos no tempo. A solução analítica sem difusão para o tempo  $\tau = 1$  é  $\varphi(X, \tau = 1) = 1 + e^{-(X-3)^2 \cdot 70}$ .

O esquema Exponencial apresentou forte dissipação numérica, enquanto que o esquema FLUX3 reproduz o pulso de forma acurada com dissipação muito menor (Figura 2).

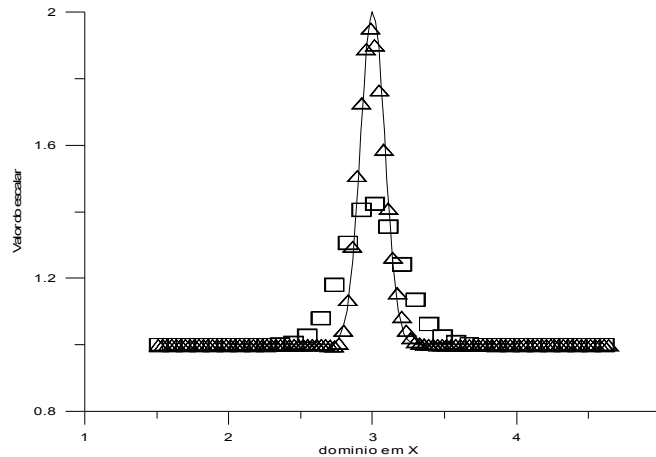


Figura 2. Comparação dos resultados obtidos no problema teste 1: (□) esquema exponencial, (Δ) esquema FLUX3 e a (—) solução analítica

**Problema teste 2:** Transporte de uma onda quadrada, sem difusão, por um campo de velocidades em um domínio bidimensional quadrado. O campo de velocidades é dado pela equação das linhas de corrente  $\psi = X \cdot Y$  o que fornece um campo de velocidades do tipo  $U = X$  e  $V = -Y$ . O domínio de  $X$  e  $Y$  está limitado entre zero e um. O escalar entra pela fronteira norte ( $Y = 1.0$ ) sob a forma de uma onda retangular de largura 0,4 e amplitude 1.

A figura 3 mostra o desempenho dos dois esquemas, onde a linha cheia é a solução exata. Pode-se observar a boa resposta do esquema FLUX3 tentando recuperar o formato da onda quadrada

entre as abscissas 0,3 e 0,7. Os overshoots e undershoots são de pequena ordem e não se nota oscilações de grande amplitude no patamar onde o escalar transportado é igual a dois. O resultado demonstra a grande dificuldade do esquema Exponencial em representar um fenômeno puramente convectivo através de um campo de velocidades bidimensional, devido aos grandes erros por difusão numérica.

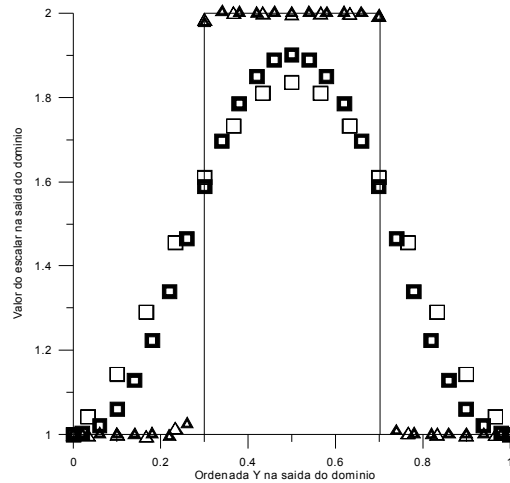


Figura 3. Comparação dos resultados obtidos no problema teste 2: (—) solução analítica, (□) esquema exponencial e (Δ) esquema FLUX3. Malhas com 15x15 e 25x25 volumes de controle.

**Problema teste 3:** Trata-se de uma variação do problema de Smith-Hutton [7] proposta por Nieckele [3]. Trata-se da convecção-difusão de um escalar  $\varphi$  devido a um campo de velocidades bidimensional. O campo de velocidades é definido pela função corrente  $\psi = -V_c \cdot (1 - X^2) \cdot (1 - Y^2)$  fornecendo assim as velocidades nas direções coordenadas:  $U = 2 \cdot V_c \cdot Y \cdot (1 - X^2)$  e  $V = -2 \cdot V_c \cdot (1 - Y^2)$  onde  $V_c$  é a velocidade característica do problema. O domínio de  $X$  varia entre menos um e um enquanto que o domínio em  $Y$  varia entre zero e um.

Impõe-se uma solução analítica para o campo de  $\varphi$  e assim, calculam-se as condições de contorno e distribuição do termo fonte, utilizados a seguir na simulação, para aferição do erro. A distribuição do escalar na entrada do domínio para  $-1 \leq X \leq 0$ , é dada por:  $\varphi = 1 + \tanh[\theta(X, Y)]$ , onde  $\theta(X, Y) = 15 \cdot [4/3 \cdot (1 - X^2) \cdot (1 - Y^2) - 1]$ .

Para satisfazer a equação de conservação, sendo  $\rho$  e  $\Gamma^\varphi$  constantes, a distribuição do termo fonte através do domínio é:  $S^\varphi = \Gamma^\varphi \cdot 40 \cdot \text{sech}^2(\theta) \cdot [\alpha + \beta \cdot \tanh(\theta)]$ , onde  $\alpha = (1 - X^2) + (1 - Y^2)$  e  $\beta = 80 \cdot [Y^2 \cdot (1 - X^2)^2 + X^2 \cdot (1 - Y^2)^2]$ .

Para a comparação da acuidade dos esquemas testados foram utilizadas curvas de erro máximo definido por:  $\text{Erro} = \max[1 - \varphi_{i,j}^{\text{numerico}} / \varphi_{i,j}^{\text{exato}}]$  em função do número de Peclet (Figura 4).

Por assumir o fluxo total  $J$ , constante em cada volume de controle, o esquema Exponencial tem dificuldade em lidar de forma adequada com o termo fonte. O esquema FLUX3 demonstra ser capaz de, mesmo com malhas menos refinadas, gerar erros significativamente menores que o esquema Exponencial. Ao redor de Peclet igual a duzentos, o erro gerado pelo esquema FLUX3 usando malha 20x10 já é menor que aquele obtido pelo esquema exponencial utilizando malha 60x30.

A pequena inclinação da curva de erro com relação ao aumento do número de Peclet mostrada no esquema FLUX3, demonstra boa adaptação a problemas com a presença de termos fonte, onde o termo difusivo vai perdendo sua importância à medida que aumenta o número de Peclet.

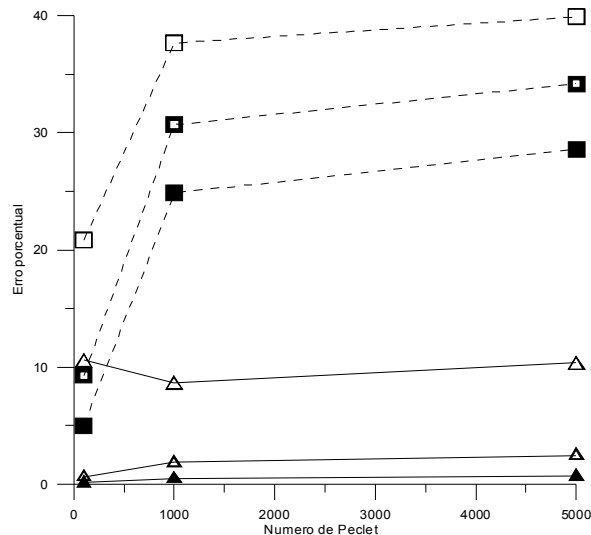


Figura 4. Comparação dos erros percentuais obtidos no problema teste 3: (---) esquema exponencial e (—) esquema FLUX3 com malhas 20x10, 40x20 e 60x30.

### Conclusões

O esquema FLUX3 é uma extensão do esquema Exponencial onde o termo adicional  $Jhat3$  é calculado de forma iterativa para a solução de problemas de transporte envolvendo convecção e difusão, este esquema apresentou para os problemas testes aqui abordados, um desempenho em termos de erro com relação à malha e número de Peclet, muito superior ao tradicional esquema Exponencial. O emprego do esquema FLUX3 em casos não lineares envolvendo escoamentos compressíveis viscosos ou não, pode utilizar o que já foi desenvolvido para o tratamento dos termos de pressão e fontes, na vasta literatura disponível para o esquema Exponencial e será alvo de futuros trabalhos.

### Referências

1. A. J. Cossley, "Accurate and efficient numerical solutions for the Saint Venant equations of open channel flow", Ph. D. Thesis, University of Nottingham, 1999.
2. J. R. Figueiredo, J. Llagostera, "Comparative Study of the Unified Finite Approach Exponential-Type Scheme (UNIFAES) and its Application to Natural Convection in a Porous Cavity - Part B", Numerical Heat Transfer, v.35, pp.347-369, (1999).
3. A. O. Nieckele, "Development and evaluation of numerical schemes for the solution of convection-diffusion equations" Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1985.
4. P. C. Oliveira, "Esquema FLUX-SPLINE aplicado em cavidades abertas com convecção natural", Tese de Doutorado, FEM - UNICAMP, 1997.
5. S. V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow". Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
6. M. Popescu, W. Shyy, M. Garbey, "Finite volume treatment of dispersion-relation-preserving and optimized prefactored compact schemes for wave propagation", Journal of Computational Physics, vol. 210, pp.705-729, (2005).
7. R. S. Smith, A. G. Hutton, The Numerical Treatment of Advection: A performance Comparison of Current Methods, Numerical Heat Transfer, vol. 5, pp. 439-461, (1982).
8. L. M. C. Varejão, "Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer". Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1979.