

# Divergência do Filtro de Kalman para Sistemas Lineares

**Eduardo F. Costa,**

Depto de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP,

13560-970, São Carlos, SP

E-mail: efcosta@icmc.usp.br

**Resumo:** *Neste texto explicamos de forma sintética resultados recentes sobre estabilidade do filtro de Kalman para sistemas lineares a tempo discreto, variantes no tempo. O contexto é bastante geral, com sistemas possivelmente não detetáveis e com incorreções no modelo do ruído. Obtém-se uma condição testável, necessária e suficiente para evitar divergência exponencial, baseada em propriedades estruturais do filtro e sem lançar mão de soluções limite (que podem não existir neste cenário geral). Os resultados são especializados para sistemas invariantes no tempo, via o estudo de estabilidade parcial de um sistema não linear associado, levando a condições algébricas e com significado estrutural claro, para estabilidade e semi-estabilidade do filtro.*

**Palavras-chave:** *Filtro de Kalman, Estabilidade, Sistemas Lineares*

## 1 Introdução

O filtro de Kalman recursivo tem características interessantes, como otimalidade, melhoria da razão sinal-ruído, linearidade, e pré-cálculo dos ganhos [1]. Por outro lado, em diversas situações práticas podem surgir erros não modelados, possivelmente erro numérico, variação temporal não prevista no modelo do sistema, incerteza ou incorreções no modelo do ruído, que acarretam uma deterioração do erro de estimação, podendo tornar o filtro de Kalman desvantajoso em face a outros filtros disponíveis, por exemplo robustos ou até mesmo a filtros simplificados (por exemplo projetados com um ganho fixo estabilizante) e em alguns casos até mesmo inviabilizar a sua implementação. Sabe-se que a estimativa de estado obtida pode divergir rapidamente do valor verdadeiro, muitas vezes de forma exponencial, veja por exemplo [15].

Em alguns casos esta deterioração pode ficar evidente durante a solução da equação recursiva de Riccati relacionada com o filtro, levando a divergência da covariância do erro de estimação nominal, claramente indicando necessidade de alguma intervenção. Contudo, em muitos casos não há indício durante o projeto do filtro. Neste texto, consideramos justamente a situação na qual não há divergência do erro nominal, e buscamos condições para que perturbações no modelo do ruído não leve a divergência do erro verdadeiro.

Há diversos resultados de suficiência para a estabilidade do filtro, como em [2, 10, 15, 16]. Contudo, estes resultados tratam de cenários simplificados ou especializados, e impõem condições de detetabilidade ou a existência de soluções limite para a equação de Riccati recursiva associada ao filtro, além de não tratarem sobre *semi-estabilidade*. Há também resultados de estabilidade para filtros de Kalman simplificados, como os estacionários ou os congelados (frozen Riccati filter) [8]. Foram também desenvolvidos filtros  $H_\infty$  e outros filtros que são intrinsecamente estáveis, os quais são frequentemente considerados como a melhor alternativa para cenários com erro de modelagem. Como uma pequena amostra dos excelentes artigos na área, em diferentes contextos, mencionamos [11, 9, 19, 17, 14]. É importante esclarecer que, apesar da enorme utilidade e do mérito destes filtros, é também sabido que às vezes o desempenho do filtro de Kalman recursivo clássico é melhor, por exemplo em sistemas cujo modelo nominal, digamos  $A$ , com incerteza na forma  $A + \Delta A$ , permanece na vizinhança do valor nominal quase todo o tempo - tipicamente, o filtro robusto é ótimo para o pior caso (pior valor de  $A + \Delta A$ ), raramente apresentado pelo

sistema. De fato, os valores nominais dos modelos são frequentemente bastante representativos quando comparado aos demais valores possíveis, mas frequentemente esta representatividade não é refletida no projeto do filtro.

É bastante oportuno comentar que há um pequeno grau de confusão na literatura e na comunidade quanto a necessidade de estabilidade do filtro. Um exemplo oportuno e esclarecedor é como segue: seja  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  o montante em uma aplicação financeira no mês  $k$ , sendo perfeitamente conhecido  $x_0$ , o valor inicial aplicado, e considere que o rendimento é exatamente 1% ao mês, de forma que obtemos o sistema  $x(k+1) = 1.01x(k)$ ,  $x(0) = x_0$ . É intuitivo tentar obter a estimativa para o montante, digamos  $\hat{x}(k)$ , através da implementação no computador de uma versão idêntica do sistema:  $\hat{x}(k+1) = 1.01\hat{x}(k)$ ,  $\hat{x}(0) = x_0$ . Esta implementação intuitiva coincide com a implementação do filtro de Kalman, pois este resulta muito trivial nesta situação em que não há qualquer ruído nominal. Contudo, na implementação no computador, surgem erros de arredondamento, que são propagados. A Figura 1 ilustra os erros de estimação absoluto e relativo; como se percebe, há divergência exponencial do erro e portanto o filtro é instável, mas por outro lado o erro relativo é bastante baixo, devido aos baixíssimos erros de arredondamento em um computador pessoal. De fato, este filtro pode ser considerado “péssimo” ou “excelente”

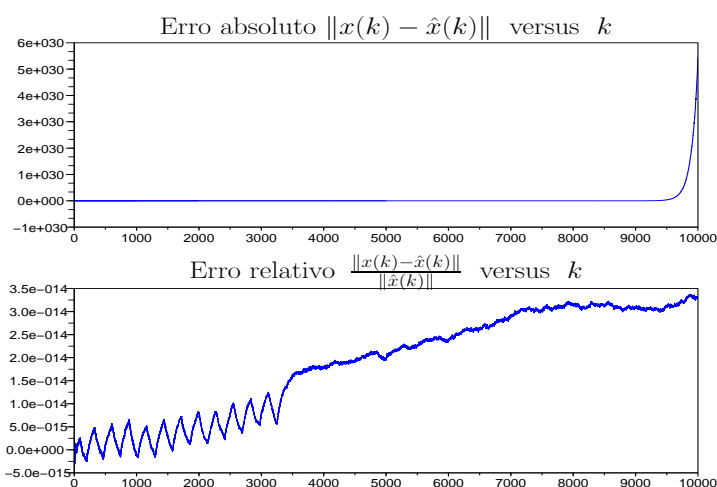


Figura 1: Erros relativo e absoluto do filtro de Kalman em um caso simples.

dependendo de se o critério a ser observado relaciona-se com o erro absoluto ou o relativo. Poderíamos modificar o projeto do filtro, visando um filtro estável que garantiria erro absoluto limitado, ou um filtro semi-estável, que garantiria que o erro relativo tenderia para zero e que o erro absoluto divergisse não mais que polinomialmente.

Neste texto, explicamos resumidamente resultados desenvolvidos em [4, 7], levando a uma caracterização bem completa de semi-estabilidade e estabilidade do filtro de Kalman. Os resultados permitem verificar a possibilidade de divergência exponencial do erro de estimação antes da implementação do filtro e da solução da equação recursiva de Riccati associada. Também permitem tratar o problema de “estabilização” do filtro através de modificações “mínimas” no modelo do ruído, aperfeiçoando a regra prática de se tomar matrizes de covariância positivas. Vale mencionar que semi-estabilidade também assegura que o “erro relativo” converge para zero no contexto em que o sistema é instável, que é uma das situações desfavoráveis para filtragem.

## 2 Formulação e perspectiva frente a resultados anteriores

Considere o sistema linear variante no tempo, a tempo discreto, definido por

$$\Phi : \begin{cases} x(k+1) = A_k x(k) + B_k w(k), & x(0) = x_0, \\ y(k) = C_k x(k) + D_k v(k), \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  o estado,  $y(k) \in \mathbb{R}^r$  a variável observada,  $w(k) \in \mathbb{R}^p$  e  $v(k) \in \mathbb{R}^q$  as variáveis de ruído que formam processos independentes entre si e das demais variáveis, e  $x_0$  uma variável aleatória independente com valor esperado nulo e satisfazendo  $\mathcal{E}\{x_0 x_0'\} = \Psi$ . Os processos formados por  $w$  e  $v$  são Gaussianos e satisfazem, sem perda de generalidade,  $\mathcal{E}\{w(k)w(k)'\} = I$  e  $\mathcal{E}\{v(k)v(k)'\} = I$ . O filtro de Kalman recursivo fornece uma estimativa  $\hat{x}(k)$  para  $x(k)$  que é construída a partir da matriz de covariância nominal do erro de estimação  $P(k)$ ,  $k \geq 0$ , calculada recursivamente pela seguinte equação a diferenças de Riccati

$$P(k+1) = A_k[P(k) - P(k)C_k'(C_k P(k)C_k' + D_k D_k')^{-1}C_k P(k)]A_k' + E_k E_k', \quad (2)$$

com condição inicial  $P(0) = \Sigma$ , sendo  $\Sigma \in \mathcal{R}^{n \times n}$  e  $E \in \mathcal{H}^{n \times p}$ , os valores nominais disponíveis para os verdadeiros  $\Psi$  e  $B$ . A inversa acima existe pois assumimos  $D_k D_k' > 0$  (filtro não singular). O ganho do filtro é calculado de acordo com  $L_k = A_k P(k) C_k' [C_k P(k) C_k' + D_k D_k']^{-1}$ , e a estimativa é dada por  $\hat{x}(k+1) = A_k \hat{x}(k) + L_k [y(k) - C_k \hat{x}(k)]$ , considerando condição inicial  $\hat{x}(0) = 0$ .

Assumimos que há um limitante da forma  $P(k) \leq \bar{P}$ , de maneira que o projeto do filtro sugira que o erro de estimação é limitado. Entretanto, a verdadeira matriz de covariância  $\tilde{X}(k)$  não coincide com  $P(k)$ , sendo dada por  $\tilde{X}(0, B, \Psi) = \Psi$  e

$$\tilde{X}(k+1, B, \Psi) = (A_k - L_k C_k) \tilde{X}(k, B, \Psi) (A_k - L_k C_k)' + L_k D_k D_k' L_k' + B_k B_k'. \quad (3)$$

As questões da estabilidade e da semi-estabilidade do filtro (respectivamente, da limitação e da não ocorrência de divergência exponencial do erro verdadeiro de estimação) consiste em estudar como se comporta  $\tilde{X}(k+1, B, \Psi)$  quando os valores verdadeiros  $B_k$  e  $\Psi$  diferem dos respectivos dados disponíveis  $E_k$  e  $\Sigma$ . A formalização matemática é como segue.

**Definição 1** (Estabilidade do filtro de Kalman).

- (i) O filtro de Kalman é semi-estável se, para cada  $B \in \mathcal{H}^{n \times p}$ ,  $\Psi \in \mathcal{R}^{n \times n}$  e  $0 \leq \xi < 1$ , existir  $\bar{X}$  satisfazendo  $\tilde{X}(k, B, \Psi) \leq \xi^{-2k} \bar{X}$ ,  $k \geq 0$ .
- (ii) O filtro de Kalman é estável se, para cada  $B \in \mathcal{H}^{n \times p}$  e  $\Psi \in \mathcal{R}^{n \times n}$  existir  $\bar{X}$  satisfazendo  $\tilde{X}(k, B, \Psi) \leq \bar{X}$ ,  $k \geq 0$ .

O estudo de estabilidade, portanto, refere-se ao estudo assintótico da equação (3). As principais dificuldades referem-se ao fato de  $L_k$  ser calculado pela equação de Riccati, de forma nada trivial. Não consideramos hipóteses simplificadoras - a seguir, comentamos cada uma das hipóteses convencionais que *não* fazemos neste trabalho.

- Restrição na magnitude do erro. Aqui, as diferenças  $\Sigma - \Psi$  e  $E_k - B_k$  podem ser de magnitude arbitrária, o que exclui muitas formulações robustas. A questão da estabilidade envolve as “direções” do erro, em contraposição à sua magnitude.
- Estabilizabilidade de  $(A_k, E_k)$ . Diversos resultados até a década de 80 (veja por exemplo [2]), consideram alguma noção de estabilizabilidade de  $(A_k, E_k)$ . Isto pode ser interpretado como exigir que o ruído persistente excite todos os modos instáveis do sistema. Este tipo de hipótese é bastante restritivo, mesmo para estabilidade. Como caso trivial, temos que  $\Sigma > 0$  assegura semi-estabilidade, mesmo quando  $E_k = 0$ ,  $k \geq 0$ .
- Detetabilidade de  $(A_k, C_k)$ . Os resultados disponíveis sobre estabilidade do filtro tratam situações simplificadas em que há uma solução limite estacionária ou periódica para  $P(k)$ , como em [10, 15, 16] e, essencialmente, estudam (3) com  $L_k$  substituído por  $L_\infty$ , o que é bastante simplificador. No cenário aqui considerado, pode nem haver convergência para uma solução periódica (o que, aliás, pode ocorrer até em sistemas invariantes no tempo).

Detetabilidade é natural quando se deseja um filtro de Kalman estável, mas é conservadora em geral (como no caso do exemplo inicial, que leva a um filtro de Kalman idêntico ao do sistema (1) com  $C_k = 0$  e  $A = 1.01$  instável, com boas propriedades de erro relativo) e em particular para filtros semi-estáveis. Consideramos apenas uma hipótese de invariância de espaços instáveis e estáveis, como segue. Considere a matriz de transição de estado  $\mathcal{A}(k+t, t) = A_{k+t} \cdots A_t$ ,  $k, t \geq 0$ . Para  $\tau > 0$ , seja  $M_\tau(k+t, t)$  uma projeção no espaço instável<sup>1</sup> de  $\tau\mathcal{A}(k+t, t)$  tal que  $M_\tau(k+t, t)v = 0$  quando  $v$  está no espaço semi-estável de  $\tau\mathcal{A}(k+t, t)$ .

**Hipótese 1.** *Existem  $T$  e  $0 < \tau < 1$  tais que  $M_1((k+1)T, kT) = M_\tau((k+1)T, kT) = M_1(T, 0)$ ,  $k \geq 0$ .*

Por simplicidade, denotamos  $M = M_1(T, 0)$ , sendo  $T$  como acima. A Hipótese 1 é trivialmente satisfeita para sistemas invariantes no tempo ou periódicos, sendo  $T$  o período e com  $\zeta^{-1} < \tau < 1$ , sendo  $\zeta$  o módulo do autovalor instável de  $\mathcal{A}(T+t, t)$  que se encontra mais próximo do círculo unitário (se houver algum, senão  $0 < \tau < 1$ ). Uma interpretação para esta hipótese é que os espaços instáveis de  $\mathcal{A}$  sejam invariantes ao longo de sequências de passo  $T$ , e similarmente para os espaços semi-estáveis de  $\mathcal{A}$ ; além disso, os espaços instáveis devem apresentar uma margem mínima de instabilidade, relacionada com  $\tau^{-1}$ .

### 3 Abordagem e resultados principais

A abordagem empregada em [4] para estudar semi-estabilidade do filtro caminha no sentido de eliminar ou substituir variáveis da equação (3) que são difíceis de se lidar. Inicialmente mostra-se que  $B$  e  $\Psi$ , cujos valores assumimos como desconhecidos, podem ser fixados como  $\Psi = I$  e  $B = E$  (ausência de erro no ruído persistente); note que isso significa que ambos tipos de erro podem causar divergência do erro verdadeiro, indistintamente. Em seguida, busca-se substituir  $P$  por outra variável mais simples. Os elementos essenciais da abordagem são:

- mostra-se que  $X(k) = \mathcal{E}\{x(k)x(k)'\}$ , calculado assumindo que não há erro no modelo do ruído,  $B_k = E_k$  e  $\Psi = \Sigma$ , tem uma relação direta (e útil) com  $P_k$ :  $\ker\{P(k)\} = \ker\{X(k)\}$ ,  $k \geq 0$ .  $X(k)$  pode ser obtido recursivamente por  $X(0) = \Psi$  e

$$X(k+1) = A_k X(k) A_k' + E_k E_k', \quad k \geq 0, \quad (4)$$

- mostra-se que se  $P_k$  descreve estruturalmente o erro verdadeiro num dado instante, então ele o continua descrevendo em instantes consecutivos. Em particular, para  $V$  tal que  $\ker\{V\} \supset \ker\{P(0)\}$ , mostra-se que existe um  $\tilde{X}$  satisfazendo  $\tilde{X}(k, E, V) \leq \tilde{X}$ ,  $k \geq 0$  e, além disto,  $\ker\{P(k)\} \subset \ker\{\tilde{X}(k, E, V)\}$ ,  $k \geq 0$ . Isto esclarece que, quando  $P(0) = \Sigma > 0$ , temos  $\ker\{\Psi\} \supset \ker\{P(0)\}$  levando a  $\tilde{X}(k, E, \Psi) \leq \tilde{X}$ ,  $k \geq 0$ , uma espécie de estabilidade do filtro com respeito a  $\Psi$  (mais fraco que estabilidade e mais forte que semi-estabilidade).
- uma propriedade de ortogonalidade envolvendo o ganho de Kalman:  $H_{k+1} L_k C_k = 0$ , em que  $H_k$  representa a projeção ortogonal no espaço nulo de  $X(k)$ .

Estes elementos são empregados em uma avaliação em que se reescreve (3) em termos das projeções  $H_k \tilde{X}(k, B, \Psi) H_k'$  e  $(I - H_k) \tilde{X}(k, B, \Psi) (I - H_k)'$ . Para os termos envolvendo  $(I - H_k)$  (projeção que corresponde ao espaço perpendicular ao espaço nulo de  $P_k$ ) mostra-se que estão limitados por termos proporcionais a  $\tilde{X}$ , sendo que o filtro projetado já leva em consideração ruídos nestas direções e que a matriz de covariância nominal  $P_k$  é limitada por  $\tilde{X}$ . Com respeito aos termos envolvendo  $H_k$ , ligados às direções em que o projeto do filtro não leva em consideração ruído (portanto não permite concluir a respeito da sua limitação), eliminam-se aqueles em que aparece  $L_k$  em virtude da terceira propriedade acima.

<sup>1</sup>Espaço gerado por autovetores correspondentes a autovalores fora do círculo unitário; notação semelhante vale para espaço estritamente semi-estável (sob o círculo) e semi-estável (sob o círculo ou dentro dele).

**Teorema 1** ([4, 5]). *o filtro de Kalman é semi-estável se e somente se, para cada  $0 \leq \xi < 1$ , existir  $\bar{Z}$  tal que  $Z(k) \leq \xi^{-k}\bar{Z}$ , sendo que a matriz simétrica e positiva semi-definida  $Z(k)$ ,  $k \geq 0$ , é a componente do estado do sistema descrito por*

$$\Theta : \begin{cases} Z(k+1) = (H_{k+1}A_k)Z(k)(H_{k+1}A_k)', \\ X(k+1) = A_kX(k)A_k' + E_kE_k', \quad k \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

com condição inicial  $(Z(0), X(0)) = (H_0H_0', \Sigma)$ , sendo  $H_k$  a projeção ortogonal em  $\ker\{X(k)\}$ .

Como se percebe, a condição obtida envolve apenas as matrizes  $A$ ,  $E$  e  $\Sigma$ , que são disponíveis, desconsidera a equação de Riccati e pode ser testada para um horizonte de tempo arbitrário.

Para sistemas invariantes no tempo, transforma-se a condição recursiva do Teorema 1 em uma condição algébrica, facilmente verificável, e com significado estrutural, como passamos a explicar agora. A abordagem consiste em estudar, inicialmente, a estabilidade parcial do sistema  $\Theta$ , ou, na verdade, de um caso particular deste sistema em que a matriz  $A_k = A$  é fixa e não há termos forçantes,  $E = 0$ . Problemas de estabilidade parcial tipicamente tratam da questão da convergência de uma componente do estado em função da mesma componente ou de outra, e encontra-se bastante estudada em uma série de contextos (na monografia [18] encontram-se uma descrição bem detalhada da área e diversas referências, veja também [3, 12]). Contudo, o problema em que recaímos e o tipo de condição algébrica e estrutural que visamos obter não se encaixam em nenhuma das técnicas disponíveis, sendo que  $\Theta$  é não linear, portanto não podendo lançar mãos de técnicas lineares, e por outro lado apresenta conexões fortes com sistemas lineares via a componente  $X$ , que é linear, tornando técnicas de sistemas não lineares demasiadamente gerais para nossos propósitos. Para tratar do problema, desenvolveram-se em [7] aproximações para as projeções  $H_k$ , empregando uma série de bases (bases “variantes no tempo”) que proporcionam uma estrutura mais simples para a matriz  $A$ , e empregar estas aproximações em avaliações diretas. O resultado são as seguintes condições algébricas.

**Lema 1** ([4, 6]). *Considere o sistema  $\Theta$  com  $A_k = A$  e  $E_k = 0$ ,  $k \geq 0$ . Seja  $J$  tal que  $JAJ^{-1}$  esteja na forma de Jordan e sejam  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}_S$  os subespaços instável e estável de  $JAJ^{-1}$ , respectivamente. As seguintes afirmações valem:*

(i) *Para cada  $0 \leq \xi < 1$ , existe  $\bar{Z}$  tal que  $Z(k) \leq \xi^{-k}\bar{Z}$  se e somente se*

$$\ker\{J\Sigma J'\} \cap \mathcal{J} = \{0\}. \quad (6)$$

(ii) *Existe  $\bar{Z}$  tal que  $Z(k) \leq \bar{Z}$  se e somente se  $\ker\{J\Sigma J'\} \cap \mathcal{J}_S^\perp = \{0\}$ .*

Retornando ao problema de estabilidade do filtro de Kalman, procuramos compatibilizar os resultados do Lema 1, que é restrito ao caso  $E = 0$ , com o do Teorema 1 para o caso geral  $E \neq 0$ . Para isso, utiliza-se a matriz modificada  $HA$  (ao invés de  $A$ ) no Lema 1, sendo  $H$  a projeção no espaço não controlável de  $(A, E)$ , permitindo incluir a dependência de  $E$  de forma indireta. O resultado principal é transcrito abaixo.

**Teorema 2** ([4, 6]). *O filtro de Kalman para sistemas lineares invariantes no tempo é semi-estável se e somente se*

$$\ker\{J_H \Sigma J_H'\} \cap \mathcal{J}_H = \{0\}, \quad (7)$$

sendo  $J_H$  tal que  $J_H H A J_H^{-1}$  está na forma de Jordan e  $\mathcal{J}_H$  o espaço instável de  $J_H H A J_H^{-1}$ .

**Observação 1.** A condição (7) aparece na literatura como uma condição para  $P(0) = \Sigma$  pertencer a base de atração da solução forte da equação algébrica de Riccati para sistemas detetáveis veja [13]. O presente trabalho esclarece o papel desta condição para sistemas não detetáveis.

Além da condição para semi-estabilidade, obtemos uma condição testável, necessária e suficiente de estabilidade para o filtro de Kalman. A prova de suficiência é obtida de forma direta a partir dos resultados encontrados em [13, 16], e a necessidade é demonstrada de uma forma simples (a simplicidade, aqui, advém do uso de ferramentas de comparação com a solução limite da equação de Riccati, a qual, como sabemos, apenas podem ser usadas em casos detetáveis).

**Teorema 3** ([4, 6]). *O FK é estável se e somente se ele é semi-estável,  $(A, C)$  é detetável e  $\mathcal{S}_H = \{0\}$ , sendo  $\mathcal{S}_H$  o espaço estritamente semi-estável de  $J_H H A J_H^{-1}$ .*

**Exemplo 1** (Excitação via  $\Sigma$  versus  $E$ ). *Seja o sistema  $\Phi$  com*

$$A_k = A = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}, C_k = D_k = I, k \geq 0.$$

*A Hipótese 1 é satisfeita pois o sistema é invariante no tempo, e a hipótese de existência de um limitante  $\bar{X}$  para a solução da Riccati é satisfeita porque  $C = I$  garante detetabilidade do sistema. Considere os seguintes casos.*

*(i)  $\Sigma = 0$  com  $\sigma = [0 \ 1]$  e  $E_k = \sigma' \sigma$ ,  $k \geq 0$ . A estabilizabilidade de  $(A, E)$  é suficiente para assegurar estabilidade:  $C = I$ ,  $H = 0$  e  $HA = 0$ , fornecendo  $J_H = \{0\}$ .*

*(ii)  $\Sigma = \sigma' \sigma$ , sendo  $\sigma =$  como em (i), e  $E_k = 0$ ,  $k \geq 0$ . Temos  $H = I$ ,  $HA$  já está na forma de Jordan e  $J_H = I$ , levando a  $\ker\{\Sigma\} \cap \mathbb{R}^n = [\mu]$  sendo  $\mu = [1 \ 0]'$ , de modo que (7) não é satisfeita, logo o FK não é semi-estável (apesar de  $(A, \Sigma)$  ser estabilizável).*

*Observe que  $E$  é idêntico a  $\Sigma$  em (i) e vice versa, com uma possível interpretação de que  $\Sigma$  deve excitar “completamente” os espaços instáveis de  $A$ , enquanto  $E$  apenas tem que excitá-los. No mesmo sentido, se desejarmos estabilizar o filtro através de uma modificação em  $\Sigma$ , mantendo  $E_k = 0$ , temos que tomar  $\Sigma > 0$ .*

**Observação 2.** Uma interpretação para a condição em (7) é que os espaços instáveis de  $A$  que ainda não são excitados por  $E$  devem ser completamente excitados por  $\Sigma$ . Veja o Exemplo 1 para uma melhor compreensão do sentido no qual dizemos “completamente”. A condição  $\mathcal{S}_H = \{0\}$  requer que os espaços estritamente semi-estáveis de  $A$  sejam excitados por  $E$  (não basta que sejam excitados por  $\Sigma$ , pois há casos em que o ruído não persistente associado a  $\Sigma$  esvanece à medida que o tempo evolui).

**Observação 3.** As condições nos Teoremas 2 e 3 podem ser empregadas em problema de estabilização do FK nos quais se deseja encontrar  $E$  e/ou  $\Sigma$  ou introduzir modificações “mínimas” nestas matrizes, por exemplo na forma  $E + E_1$  e  $\Sigma + \Sigma_1$ , de forma a satisfazer a noção de estabilidade adequada para a aplicação. Como ilustração temos que  $\Sigma = \sigma_1 \sigma_1' + \dots + \sigma_r \sigma_r'$ , com  $r = \dim(\mathcal{J}_H)$ , é tal que o FK é semi-estável se e somente se  $\sigma_j$ ,  $0 \leq j \leq r$ , são vetores linearmente independentes com projeções não-triviais em  $\mathcal{J}_H$ . Condições similares valem para estabilidade e estabilidade com respeito a  $\Psi$ .

## 4 Agradecimentos

Agradecemos ao Prof. Astolfi pela colaboração e co-autoria nos artigos e resultados em que este texto se baseia, e à FAPESP pela bolsa “Novas Fronteiras” 06/02004-0 e auxílio 06/04210-6, ao CNPq pela bolsa PQ 304429/2007-4 e auxílio 482386/2007-0, e ao EPSRC pela Research Grant EP/E057438, para o desenvolvimento daqueles resultados. Agradecemos ao Prof. Geraldo Nunes Silva pelo convite para participação no Minisimposio em Controle desta edição do CNMAC.

## Referências

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, London, first edition, 1979.

- [2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. Detectability and stabilizability of discrete-time linear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 19(1):20–32, 1981.
- [3] V. Chellaboina and W. M. Haddad. A unification between partial stability and stability theory for time-varying systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 22(6):66–75, 2002.
- [4] E. F. Costa and A. Astolfi. A necessary and sufficient condition for exponential divergence of the recursive Kalman filter for linear time-varying systems. *Submitted to the SIAM Journal on Control and Optimization*.
- [5] E. F. Costa and A. Astolfi. A necessary and sufficient condition for semi-stability of the recursive Kalman filter. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 1280 – 1285, Seattle, WA, USA, 2008.
- [6] E. F. Costa and A. Astolfi. On the stability of the recursive Kalman filter for linear, time-invariant systems. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 1286 – 1291, Seattle, WA, USA, 2008.
- [7] E. F. Costa and A. Astolfi. Partial stability for a class of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47:3203 – 3219, 2009.
- [8] C. E. de Souza. On stabilizing properties of solutions of the Riccati difference equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(12):1313–1316, 1989.
- [9] C. E. de Souza, A. Trofino, and K. A. Barbosa. Mode-independent H-infinity filters for Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(11):1837–1841, 2006.
- [10] R. J. Fitzgerald. Divergence of the Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6):736–747, 1971.
- [11] J. C. Geromel and R. H. Korogui.  $h_2$  robust filter design with performance certificate via convex programming. *Automatica*, 44:937–948, 2008.
- [12] S. G. Nersesov and W. M. Haddad. On the stability and control of nonlinear dynamical systems via vector Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(2):203–215, 2006.
- [13] P. Park and T. Kailath. Convergence of the RDE solution to the ARE strong solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(4):573–578, 1997.
- [14] I. R. Petersen and A. V. Savkin. *Robust Kalman Filtering for Signals and Systems with Large Uncertainties*. Birkhauser, Boston, 1999.
- [15] C. F. Price. An analysis of divergence problem in the Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(6):699–702, 1968.
- [16] S. Sangsuk-Iam and T. E. Bullock. Analysis of discrete-time Kalman filtering under incorrect noise covariances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(12):1304–1309, 1990.
- [17] A. H. Sayed. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7):998–1013, 2001.
- [18] V. I. Vorotnikov. *Partial stability and control*. Birkhauser, Boston, 1998.
- [19] D. Yue and Q. Han. Robust  $H_\infty$  filter design of uncertain descriptor systems with discrete and distributed delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(11):3200–3212, 2004.