

## Comparação e Análise de Desempenho entre as Formulações Hiper-singular e Singular do Método de Elementos de Contorno em Problemas de Campo Escalar

**Carlos F. Loeffler**

UFES – Departamento de Engenharia Mecânica  
29075 910 – Campus Goiabeiras – Vitória - ES  
E-mail: carlosloeffler@bol.com.br

**Enilene Regina Lovatte**

IFES - Coordenadoria do Curso Técnico em Ferrovias  
29145 440 – Campus Cariacica - ES  
E-mail: enilene@cefetes.br

**Humberto Barroncas Corrêa**

IFES – Coordenadoria do Curso Técnico em Mecânica  
29040 780, Campus Vitória - ES  
E-mail: barroncas@cefetes.br

### RESUMO

*Neste trabalho apresentam-se as formulações singular e hiper-singular do Método de Elementos de Contorno e comparam-se seus resultados em problemas de campo escalar estacionários bidimensionais, governados pela Equação de Laplace. Embora as características de ambas as formulações já tenham sido apresentadas na literatura especializada, muitas particularidades interessantes da formulação hiper-singular não são bem conhecidas e devem ser melhor avaliadas, especialmente com base em resultados comparativos com a formulação singular clássica.*

**Palavras-chave:** *Método de Elementos de Contorno, Formulação Hiper-singular, Método dos Resíduos Ponderados.*

### Método de Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método computacional discreto, dirigido à solução de problemas físicos cujos modelos matemáticos são regidos por equações diferenciais. O MEC encontra-se entre os principais métodos aproximados de solução e destaca-se entre os demais por discretizar exclusivamente o contorno, apresentar bons resultados e ser de fácil aplicação. Em função dessas qualidades, intensas pesquisas têm ampliado seu campo de aplicação, ao mesmo tempo em que são elaborados códigos ou aplicativos computacionais de uso industrial, resultando na conquista de espaço comercial.

Existem várias formulações do MEC, sendo a mais comum denominada de formulação direta ou clássica [1], na qual as variáveis básicas ou primais do problema são resolvidas, simultaneamente, com suas derivadas normais. Nesta formulação, a partir de uma equação diferencial de governo, obtém-se uma equação integral de contorno, posta na sua forma inversa. Considere, então, o caso de problemas de campo estacionários, sem fontes, no qual um potencial escalar  $u(X)$  é definido na extensão de um domínio  $\Omega(X)$  delimitado por um contorno  $\Gamma(X)$ . Tais problemas são governados pela Equação de Laplace, cuja forma integral é [2]:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma \quad (1)$$

Na equação (1),  $u(X)$  é o potencial (variável básica),  $q(X)$  é a derivada normal do potencial e  $u^*(\xi; X)$  e sua derivada normal  $q^*(\xi; X)$  são funções auxiliares, que, no contexto do MEC, têm importância capital, pois a primeira função é a solução de um problema de potencial correlato, governado por uma equação de Poisson, no qual o domínio é infinito e uma fonte concentrada unitária é aplicada no ponto  $X=\xi$ . Para problemas bidimensionais tem-se [2]:

$$u^*(\xi; X) = (-1/2\pi) \ln r(\xi; X) \quad \text{e} \quad q^*(\xi; X) = (-1/2\pi r) r_{,i} n_i \quad (2)$$

Nas equações (2),  $r(\xi; X)$  é a distância euclidiana entre os pontos denominados fonte  $X=\xi$  e o campo  $X=X(x_i)$ . São também definidas condições de contorno tais que:

$$u = \bar{u} \quad (\text{essenciais em } \Gamma_u) \quad \text{e} \quad u_{,i} n_i = \bar{q} \quad (\text{naturais em } \Gamma_q) \quad (3)$$

Nas expressões anteriores  $n_i$  é o vetor unitário normal externo ao ponto  $X=X(x_i)$  e o contorno  $\Gamma(X)$  é igual a  $\Gamma_u + \Gamma_q$ .

Na equação integral (1), o ponto fonte está localizado internamente ao domínio  $\Omega(X)$ . Em termos práticos, o emprego do MEC requer a implementação de um processo básico de discretização e os pontos fonte precisam ser localizados externamente ao domínio ou sobre o contorno, para gerar um sistema matricial de equações compatível. No caso do ponto fonte situar-se no contorno, tem-se:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma(X) \quad (4)$$

Para contornos suaves, o valor da constante  $c(\xi)$  é igual a 0,5. Outros valores são facilmente encontrados para contornos não suaves, como no caso de cantos. De acordo com procedimentos operacionais tradicionais do MEC, a equação (4) é discretizada através da segmentação do contorno em elementos, ao longo dos quais as variáveis básicas são aproximadas por funções típicas de forma. São estabelecidos  $N$  pontos nodais e a aplicação da equação (4) para todos esses pontos gera o sistema de equações abaixo, onde  $H$  e  $G$  são matrizes  $N \times N$  e  $U$  e  $Q$  são vetores, matricialmente expresso por:

$$HU - GQ = 0 \quad (5)$$

### Formulação Hipersingular do MEC

A aplicação das condições de contorno na equação matricial (5) permite a obtenção dos valores de potencial e da derivada normal nos pontos do contorno onde tais grandezas eram incógnitas. Para calcular valores do potencial em pontos internos, utiliza-se um procedimento muito simples: reaplica-se a equação integral de governo (4) utilizando-se os valores nodais já determinados, tomando como pontos fonte  $\xi^i$  os pontos internos desejados, ou seja:

$$u(\xi^i) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u^*(\xi^i; X) d\Gamma - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q^*(\xi^i; X) d\Gamma \quad (6)$$

Na Equação (6),  $\phi_k(X)$  são funções de forma e  $U_k^e$  e  $Q_k^e$  são as variáveis nodais, potenciais e derivadas normais, já calculadas. Historicamente, esse procedimento foi feito, inicialmente, apenas para valores do potencial, sendo posteriormente estendido para o cálculo de valores da derivada direcional. Nesse caso, deriva-se a equação (6) com relação às coordenadas espaciais do ponto fonte, de modo que:

$$q_j(\xi^i) = \frac{\partial u(\xi^i)}{\partial x_j(\xi)} = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k \frac{\partial u^*(\xi^i; X)}{\partial x_j(\xi)} d\Gamma - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k \frac{\partial q^*(\xi^i; X)}{\partial x_j(\xi)} d\Gamma \quad (7)$$

Por outro lado, em vários problemas físicos, especialmente na elasticidade, é de grande interesse o cálculo de derivadas do potencial no contorno. De acordo com [5], esse procedimento foi desenvolvido, inicialmente, na elasticidade, com o propósito de calcular tensões tangenciais no contorno com maior precisão. A idéia foi estendida para problemas de potencial escalar bidimensional apenas em 1988, embora em várias aplicações, como nos casos em que se deseja conhecer o campo de velocidades a partir de um potencial de pressão, seja indispensável se conhecer tanto as componentes de velocidade normal quanto tangencial.

Para se aplicar a equação integral inversa em termos das derivadas normais para pontos situados no contorno, um extenso tratamento matemático deve ser empreendido com o propósito de levantar adequadamente o limite quando o ponto fonte posiciona-se no contorno [4]:

A equação integral resultante para o caso geral é dada por:

$$s(\xi)q_j(\xi) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_j} q(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_j} [u(X) - u(\xi)] d\Gamma(X) \quad (8)$$

No caso de contornos suaves o valor da constante  $s(\xi)$  é igual a 0,5; entretanto, para outras condições, surge um acoplamento entre as derivadas direcionais, requerendo um tratamento computacional mais elaborado do que se aplica na formulação singular.

Conforme exposto, as motivações iniciais para o estudo e aplicação da formulação hiper-singular consistiram da necessidade de se calcular derivadas tangenciais no contorno com boa precisão. Este procedimento pode ser feito, simplesmente, como um pós-processamento, após a obtenção das variáveis nodais através da formulação clássica. No caso de contornos suaves, tem-se a equação abaixo, onde  $\tau$  é o fluxo tangencial.

$$\frac{1}{2} \tau(\xi) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_t(\xi)} d\Gamma - \sum_{e=1}^N [U_k^e - U(\xi)] \int_{\Gamma_e} \phi_k \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_t(\xi)} d\Gamma \quad (9)$$

### Exame da Formulação Hiper-singular pelo Método dos Resíduos Ponderados

Diante da maior complexidade matemática da formulação hiper-singular (FHS), a justificativa para empregá-la diretamente na obtenção das variáveis nodais seria a melhor capacidade de representação do campo de variáveis em regiões nas quais haja significativos gradientes, seja do potencial ou sua derivada normal. Algumas simulações [6] mostraram que apenas em problemas com elevados gradientes ou singularidades a precisão dos resultados da FHS superou a da formulação singular clássica (FSC).

Por outro lado, outros estudos empregando recursivamente a sentença integral mostraram que a precisão dos resultados do potencial no contorno é melhorada, o mesmo ocorrendo em alguns casos para suas derivadas normais [3]. O uso recursivo mencionado consiste na reaplicação da equação integral na forma discretizada, equação (4), incluindo os valores já calculados do potencial e sua derivada normal, com os pontos fontes localizados novamente no contorno, mas em coordenadas diferentes das dos pontos nodais. Sabe-se que a precisão no cálculo das variáveis internas é melhor do que a obtida nos valores de contorno. A razão disso provém do fato de que o uso recursivo da equação integral equivale a uma nova minimização dos erros numéricos cometidos, pois existe uma associação entre a equação integral de governo e uma sentença do Método dos Resíduos Ponderados (MRP), que para a Equação de Laplace é dada por [2]:

$$\int_{\Gamma_u} (\bar{u} - u) q^*(\xi; X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma_q} (q - \bar{q}) u^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Omega} (u_{,ij}) u^*(\xi; X) d\Omega = 0 \quad (10)$$

A equação (10) é a forma do MRP equivalente à forma integral inversa da equação diferencial de governo, equação (1). A solução fundamental  $u^*(\xi; X)$  e sua derivada normal  $q^*(\xi; X)$  são aqui interpretadas como funções de ponderação. No caso da FHS, tais funções de ponderação correspondem às derivadas direcionais de  $u^*(\xi; X)$  e  $q^*(\xi; X)$ , funções essas de ordem superior. Sabe-se que o bom desempenho do MRP está ligado à escolha de funções de aproximação e ponderação que obedecem a uma série de condições, nas quais se inclui a completude da seqüência, em que funções mais simples devem ser preferencialmente escolhidas, a menos que algumas peculiaridades no problema se apresentem. Isso explica a adequação da FHS em problemas com regiões com elevados gradientes, pois as funções com maior ordem de singularidade têm maior capacidade de ortogonalização de resíduos nessas condições. Resta, no entanto, estudar e comparar, mais detidamente, o comportamento da FHS na solução recursiva, seja para pontos internos quanto para valores de contorno. Ressalta-se, também, que na FHS para valores de contorno, há um termo adicional na equação integral, dado por:

$$f_t(\xi; X) = \sum_{e=1}^N [U_k^e - u(\xi)] \int_{\Gamma_e} \phi_k \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_t} d\Gamma \quad (11)$$

É provável que além da ordem mais alta das funções de ponderação, a presença desse termo adicional, de fundamental importância para a integrabilidade de  $f_t(\xi; X)$ , introduza algum efeito numérico adicional que altere a precisão ou a taxa de convergência dos resultados.

### Simulações Numéricas

Os exemplos que se seguem comparam os resultados das FSC e FHS, tanto para pontos de contorno quanto para pontos internos, de modo a melhor identificar o comportamento numérico de ambas e ratificar algumas conclusões. Particularmente, interessa o exame do desempenho da FHS no cálculo dos valores de derivadas do potencial em pontos internos, pois assim pode-se ter uma idéia da eficiência do uso de funções de mais alta singularidade, no papel de funções de ponderação, atuando recursivamente, sob a ótica do MRP.

(a) Barra Tracionada: considera-se uma barra de comprimento unitário engastada numa extremidade e sujeita a uma carga axial igualmente unitária noutra extremidade, conforme mostra a figura 1.

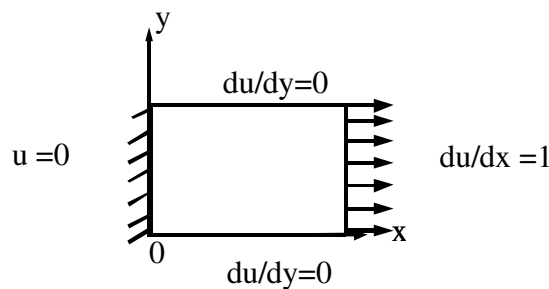


Figura 1 – Barra engastada sujeita a carga unitária na extremidade direita.

Na figura 2, à esquerda, são apresentadas as curvas do erro médio percentual cometido no cálculo do potencial, que nesse caso representa o deslocamento axial, tanto para a formulação singular (linha contínua), quanto para a hiper-singular (linha tracejada), em função da quantidade de elementos de contorno utilizados. Foram usadas malhas com 16, 32 e 64 elementos constantes. Na figura 2 à direita, mostra-se a curva de erro médio para a derivada normal do potencial, associada à tensão normal, calculada no engaste.

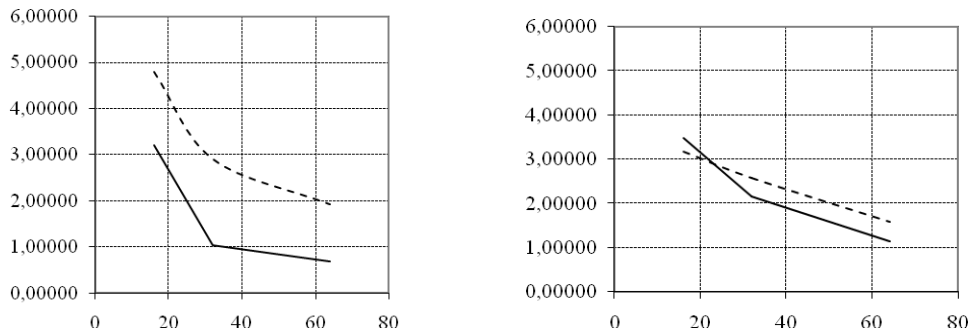


Figura 2 – Gráfico da esquerda: erro médio percentual no deslocamento axial com o refinamento. Gráfico da direita: erro médio percentual na tensão no engaste com o refinamento.

Nota-se o melhor desempenho da FSC, num problema simples em que estão ausentes gradientes ou singularidades nas variáveis básicas do problema. A atuação mais precisa da FSC se repete também no cálculo de variáveis internas, conforme mostra a figura 3, à esquerda, para a qual verifica-se uma queda significativa no erro dos valores do deslocamento, efeito positivo do uso reiterado da sentença integral, enquanto na FHS o nível de erro no valor dos deslocamentos parece não ter sido afetado pelo procedimento recursivo. No gráfico da direita é mostrado o comportamento das tensões calculadas internamente, ao longo do comprimento. Para as tensões, embora inferior ao desempenho da FSC, o nível médio de erro na FHS declinou, razoavelmente.

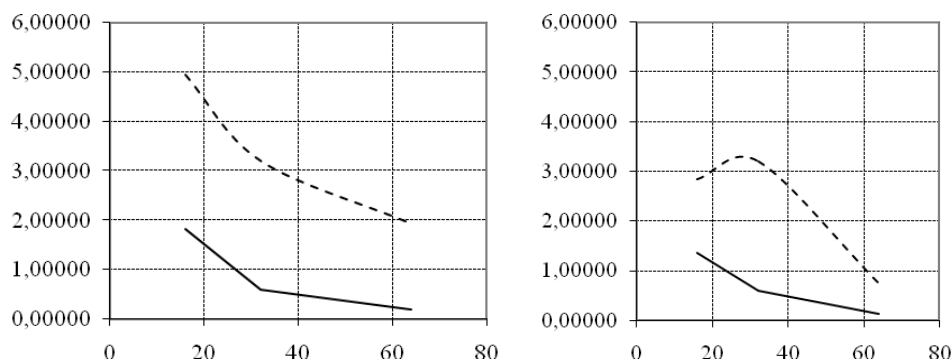


Figura 3 – Gráfico da esquerda: erro médio percentual nos deslocamentos axiais internos como refinamento. Gráfico da direita, erro médio percentual no cálculo das tensões internas ao longo da barra com o refinamento. FHS: linha contínua; FSC: linha pontilhada.

Nos gráficos da figura 4 são mostradas as curvas de deslocamento ao longo do comprimento da barra, obtidas diretamente (gráfico à esquerda) e com o uso recursivo da sentença integral (gráfico à direita), para a malha mais refinada, com 64 elementos constantes. A curva referente aos resultados da FHS aparece sempre pontilhada. Estas curvas de erro ao longo da barra mostram um aspecto que não fica evidenciado nas curvas de erro médio percentual anteriormente mostradas: os erros nos resultados da formulação hiper-singular tendem a ser muito altos nos cantos, especialmente onde se encontram elementos nos quais as condições de contorno prescritas são de tipo diferente. Embora tenha um desempenho inferior, caso sejam ignorados esses valores próximos aos cantos, os resultados hiper-singulares são bastante aceitáveis.

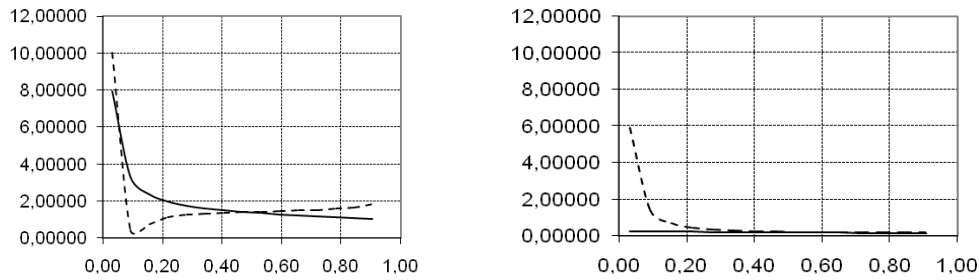


Figura 4 – Gráfico da esquerda: erro percentual nos deslocamentos nodais axiais no contorno. Gráfico da direita, erro percentual no cálculo das tensões normais internas ao longo da barra.

(b) Cilindro sob Diferencial de Temperatura: fisicamente, considera-se um cilindro infinitamente longo sujeito a diferencial de temperatura entre os contornos interno e externo. De acordo com a simetria circunferencial, apenas um quarto do domínio é discretizado por 16, 32 e 64 elementos de contorno constantes, de diferentes tamanhos, no padrão mostrado na figura 5.

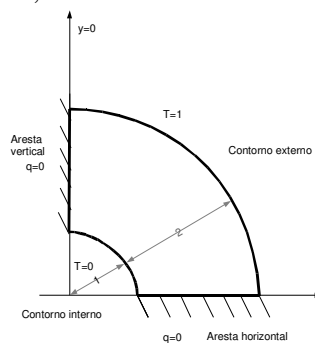


Figura 5 - Cilindro infinitamente longo sujeito a diferencial de temperatura

Na figura 6 são apresentados os erros médios percentuais na determinação da temperatura ao longo dos contornos radiais por ambas as formulações. Neste caso verifica-se que a FHS apresentou melhores resultados para a malha menos refinada, com 16 elementos, e seu desempenho na determinação dos fluxos foi bastante similar ao da FSC. Na avaliação das temperaturas, a FSC foi bem melhor, mas sua superioridade foi menos destacada do que no caso do exemplo anterior.

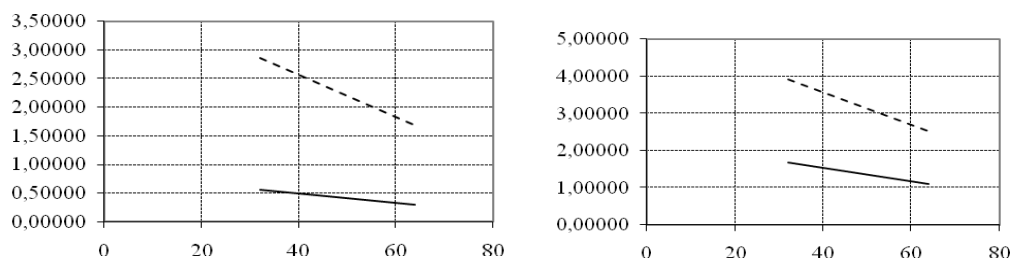


Figura 6 – Gráfico da esquerda: erro médio percentual nas temperaturas ao longo dos contornos. Gráfico da direita: erro médio percentual na determinação dos fluxos normais no contorno

Na figura 7 mostra-se a curva de erro percentual nos nós que compõem os contornos do problema para a determinação da temperatura e fluxo, considerando a malha de 64 elementos de contorno. Nota-se uma vez mais que os maiores erros da FHS ocorrem nos cantos onde diferentes condições de contorno são prescritas.

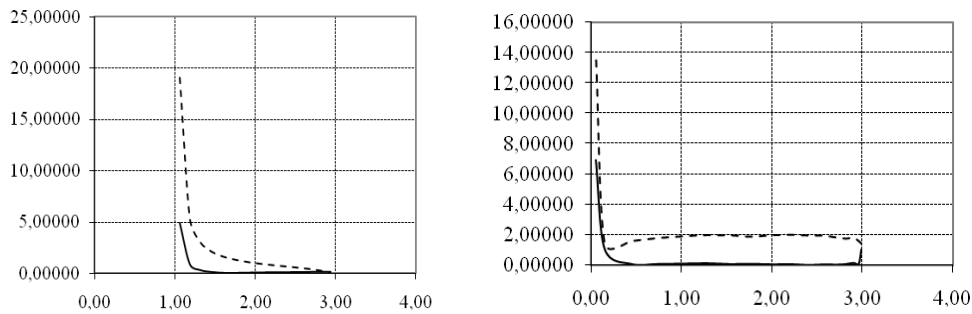


Figura 7 - Erro percentual nas temperaturas (gráfico à esquerda) e no fluxo (gráfico à direita) ao longo dos contornos externos para malha de 64 elementos.

## Conclusões

Na FHS a equação integral inversa é derivada com relação às coordenadas espaciais do ponto fonte, ampliando a ordem das singularidades presentes nas integrais. Não obstante sua integração ser mais elaborada e sensível, isto não explica as peculiaridades de seu comportamento numérico. Uma melhor compreensão é oferecida através do MRP, onde se pode verificar que o uso de funções com maior singularidade é incapaz de minimizar os resíduos numéricos com a mesma eficiência do que emprego das funções primitivas da FSC, a menos que as condições de contorno dos problemas possuam características afins de singularidade ou gradientes elevados. Isto já se pode observar no segundo exemplo, onde o comportamento logarítmico das temperaturas e hiperbólico dos fluxos permitiu uma melhoria de desempenho da FHS. É importante identificar que, por conta dessa correlação entre as funções de ponderação e os caracteres do problema, o uso recursivo da sentença integral pode não ser muito eficiente e a esperada redistribuição de resíduos no contorno praticamente não ocorra.

## Referências

- [1] C.A Brebbia, J.C. Telles, and L.C Wrobel, “Boundary Element Techniques”, Springer Verlag, Berlin (1984).
- [2] C.A..Brebbia, “The Boundary Element Method for Engineers”, Pentech Press, London, 1978.
- [3] C.F. Loeffler, L.C. Wrobel, A Simple Numerical Procedure to Improve the Accuracy of the Boundary Element Method, Proceedings of Advances in Boundary Element Techniques IX, edited by R.Abascal and M.H. Aliabadi, 21-26, 2008.
- [4] W.J.Mansur, P. Fleury Jr.& J.P.S. Azevedo, A Vector Approach to the Hyper-singular BEM Formulation for Laplace’s Equation in 2D, International Journal of BEM Communication 8, pp 239-250 (1997).
- [5] A. A. Prado, “Uma Formulação Hiper-singular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais”, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 1991.
- [6] J.C.F Telles,. A.A., Prado, Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems, Chap. 6 of Advanced Formulations in Boundary Element Methods, Elsevier, London,1993.