 ISSN 1984-820X

Estabilidade Estocástica de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos a tempo contínuo associados com um número finito de saltos

Cristiane Nespoli
Depto de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP,
19061-360, Presidente Prudente, SP
E-mail: cnespoli@fct.unesp.br

Resumo: *Este trabalho aborda a estabilidade estocástica de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM) a tempo contínuo. Os SLSM são definidos como uma família de sistemas lineares com parâmetros de saltos aleatórios governados por um processo de Markov com saltos, geralmente usados para descrever sistemas sujeitos a falhas ou reparos em sua estrutura. No modelo estudado o horizonte do problema é definido por um tempo de parada τ do processo que representa a ocorrência de um número N de falhas ou reparos no período (T_N). O conceito de τ-estabilidade é empregado uma vez que os conceitos de estabilidade usuais relacionados a problemas com horizonte puramente infinito não são adequados neste caso. Condições necessárias e suficientes para garantir a estabilidade estocástica são obtidas.*

Palavras-chave: *Sistemas lineares com saltos Markovianos, Estabilidade estocástica, Tempos de parada*

1 Introdução

Considere um sistema linear a tempo contínuo sujeito a mudanças abruptas em seus parâmetros que podem ser modeladas por uma cadeia de Markov a tempo contínuo. Esta classe de sistemas é conhecida na literatura como Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM) a tempo contínuo, vide (1) e (2).

Os SLSM têm sido extensivamente estudados desde a contribuição pioneira de Krasovskii e Lidskii [6], vide por exemplo [3] e as referências aí contidas. Com respeito a condições de estabilidade, problemas de controle ótimo e aplicações, vide por exemplo [1, 5, 2].

Uma situação de interesse a ser considerada consiste em se estudar esta classe de sistemas até a ocorrência de um evento aleatório τ, mais especificamente, um tempo de parada τ do processo conjunto $\{x_k, \theta_k; k \geq 0\}$ descrito por (1) e (2). O tempo de parada τ pode representar situações interessantes do ponto de vista das aplicações. Por exemplo, τ pode ser a n-ésima falha ou reparo acumulado do sistema. Ou ainda, τ pode representar a ocorrência de uma "falha grave", que pode ocorrer após um número aleatório de falhas. Em ambas as situações o sistema é paralisado para manutenção.

Neste contexto, os conceitos usuais de estabilidade estocástica encontrados na literatura não são adequados, uma vez que são indicados para problemas com horizonte puramente infinito, e não para problemas cujo horizonte seja definido por um tempo de parada. Por este motivo, adaptaremos o conceito de τ-estabilidade introduzido em [4] para SLSM a tempo discreto, cf. (1).

O artigo é organizado da seguinte forma. Na seção 2 apresentamos as definições básicas e na Seção 3 as condições necessárias e suficientes para a τ-estabilidade são obtidas.

2 Notação e Formulação do Problema

Ao longo deste artigo, a seguinte notação será utilizada. Denota-se o espaço real n-dimensional por $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}^{r\times m}$ ($\mathcal{M}^r$) o espaço linear normado formado por todas as matrizes reais $r\times m$ ($r\times r$). A transposta da matriz U é denotada por U' e escrevemos $U \geq 0$ ($U > 0$) para indicar que a matriz $U \in \mathcal{M}^r$ é semidefinida (definida) positiva. Assim, o cone convexo fechado (aberto) de todas as matrizes semidefinidas (definidas) positivas em $\mathcal{M}^r$ é denotado por $\mathcal{M}^{r0} = \{U \in \mathcal{M}^r : U = U' \geq 0\}$ ($\mathcal{M}^{r+}$). O espaço linear formado pelas sequências de s matrizes reais em $\mathcal{M}^{r\times m}$ ($\mathcal{M}^r$) é representado por $\mathbb{M}^{r\times m} = \{\mathbf{U} = (U_1, \cdots, U_s) : U_i \in \mathcal{M}^{r\times m}, i \in \{1,\ldots,s\}\}$ ($\mathbb{M}^r$). Por simplicidade, escreve-se $\mathbb{M}^{r0}$ quando $U_i \in \mathcal{M}^{r0}$, para todo $i \in \{1,\ldots,s\}$ e $\mathbb{M}^{r+}$ quando $U_i \in \mathcal{M}^{r+}$, para todo $i \in \{1,\ldots,s\}$. A norma da matriz U é indicada por $\|U\|$ e $\mathbb{1}_{\{.\}}$ representa a medida de Dirac. Por sua vez, $\lambda(U)$ indica um autovalor e $r_\sigma(U)$ o raio espectral de $U \in \mathcal{M}^r$, respectivamente. O operador $E[\cdot]$ indica o valor esperado.

Dado o espaço de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}, P)$, considere o SLSM autônomo $\mathcal{S}$ descrito pela seguinte equação estocástica

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}_t = A(\theta_t)x_t, & x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \theta_0 \sim \mu \\ y_t = C(\theta_t)x_t, & t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\{x_t, \theta_t; t \geq 0\}$ são os estados do processo tomando valores em $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}$, $\{\theta_t; t \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo, com espaço de estados $\mathfrak{X} = \{1,\ldots,s\}$, distribuição inicial $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_s)$ onde $\mu_i = P(\theta_0 = i)$, $\forall i \in \mathfrak{X}$ e matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, $\forall i,j \in \mathfrak{X}$, definida como

$$p_{ij} = P(\theta_{t+\Delta} = j \mid \theta_t = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases} \tag{2}$$

com $\Delta > 0$. A taxa de transição de i para j ($i \neq j$) é indicada por $\lambda_{ij} \geq 0$ e $\lambda_i := -\lambda_{ii} = \sum_{j\neq i} \lambda_{ij} < \infty$. As matrizes $A(\theta_t)$ e $C(\theta_t)$ são funções do processo aleatório de saltos $\{\theta_t; t \geq 0\}$. O conjunto $\mathfrak{X}$ contém os modos de operação do sistema (1) sendo que, para cada $\theta_t = i \in \mathfrak{X}$, a matriz $A_{\theta_t} \in \mathcal{M}^r$ (associada ao "i-ésimo" modo), será indicada por $A_{\theta_t} := A_i$. O processo acima definido satisfaz a propriedade forte de Markov.

O modelo estocástico definido por (1) e (2) pertence a categoria dos sistemas híbridos [1]. Estes sistemas apresentam diferentes configurações ou modos de operações. A mudança entre um modo de operação e outro é associada a um parâmetro de saltos aleatórios discretos cuja evolução no tempo é determinada pela probabilidade de transição acima definida. Esta característica tem sido usada para modelar uma variedade de sistemas dinâmicos. Por exemplo, sistemas sujeitos a mundanças abruptas em seus parâmetros como consequência de falhas em seus componentes. Neste artigo estamos interessados em estudar a estabilidade de tais sistemas até a ocorrência de de um número fixo N de falhas ou reparos. Neste sentido, consideramos a sequência de $\{\mathcal{F}_t\}$-tempos de parada contendo os sucessivos instantes de ocorrência de falhas (ou reparos) e então estudamos a estabilidade do sitemas (1) e (2) de acordo com estes tempos de parada .

3 Estabilidade Estocástica

Nesta seção apresentamos as condições necessárias e suficientes para a estabilidade dos SLSM acima descritos associada com uma classe de $\{\mathfrak{F}_t\}$-tempos de parada. Inicialmente, definimos a sequência $\mathcal{T}^N = \{T_n; n = 0,1,\ldots,N\}$ de tempos de parada associada aos instantes de salto:

$$T_0 = 0, \quad T_n = \min\{t > T_{n-1} : \theta_t \neq \theta_{T_{n-1}}\}, \quad n = 1,\ldots,N. \tag{3}$$

[1] Uma vez que parte do processo assume valores contínuos ($x_t \in \mathbb{R}^n$, a saber, os estados lineares), e outra parte assume valores discretos ($\theta_t \in \mathfrak{X}$, a saber, os instantes de salto).

Note que, eventualmente $T_n = +\infty$ para algum $n = 1, \dots, N$, com probabilidade não-nula.

Definição 1. Seja $\tau \in \mathcal{T}^N$ um tempo de parada com respeito à $\{\mathfrak{F}_t\}$. Então, o sistema $\mathcal{S}$ é τ-**E**stocasticamente **E**stável (τ-EE) se

$$E\Big[\int_{t=0}^{\infty} \|x_t\|^2 \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}} dt\Big] < \infty,$$

para qualquer condição inicial x_0 e distribuição inicial μ.

O Teorema a seguir apresenta as condições para a τ-estabilidade estocástica.

Teorema 1. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) O sistema $\mathcal{S}$ é τ-EE;

ii) Para qualquer conjunto de matrizes $\mathbf{Q}$ em $\mathbb{M}^n$, existe um único conjunto de matrizes $\mathbf{P} \in \mathbb{M}^n$ satisfazendo as equações de Lyapunov

$$(A_i - \lambda_i \mathbf{I}/2)' P_i + P_i (A_i - \lambda_i \mathbf{I}/2) + Q_i = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}; \tag{4}$$

iii) $r_\sigma\{\lambda(A_i - \lambda_i \mathbf{I}/2)\} < 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}$.

Demonstração. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Esta equivalência é bem conhecida da teoria de estabilidade de Lyapunov, vide [8].

(ii) $\Rightarrow$ (i) Para a prova utilizamos um argumento de indução sobre $\mathcal{T}^N$. Inicialmente, defina o funcional

$$V_t(x_t, \theta_t) = x_t'(L(\theta_t)\mathbb{1}_{\{t<T\}} + S(\theta_t)\mathbb{1}_{\{t=T\}})x_t$$

onde $L(\theta_t) \in \mathcal{M}^{n+}$ é a solução de

$$A_i' L_i + L_i A_i - \lambda_i L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} S_i + Q_i = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}, \tag{5}$$

com $S(\theta_t) \in \mathcal{M}^{n+}$.

A existência de $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$ acima deriva da condição (ii). Considere o operador infinitesimal $\mathcal{A}$ do processo conjunto $\{x_t, \theta_t;\ t \geq 0\}$

$$\mathcal{A}V_t(x_t, \theta_t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \{E_t[V_{t+\Delta}(x_{t+\Delta}, \theta_{t+\Delta})] - V_t(x_t, \theta_t)\}.$$

De acordo com [7], temos que

$$\mathcal{A}V_t(x_t, \theta_t) = x_t' \left[A(\theta_t)' L(\theta_t) + L(\theta_t) A(\theta_t) - \lambda_{\theta_t \theta_t} L(\theta_t) + \left(\sum_{j \neq \theta_t} \lambda_{\theta_t j} S_j \right) \right] x_t \mathbb{1}_{\{T \geq t\}}.$$

Entretanto, se existe $\mathbf{P} \in \mathbb{M}^{n+}$ solução de (4), então existe $\mathbf{L} \in \mathbb{M}^{n+}$ solução de (5), e a relação acima pode ser escrita como

$$\mathcal{A}V_t(x_t, \theta_t) = -x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T \geq t\}}. \tag{6}$$

Agora, observe que

$$\int_{t=0}^{\kappa} E_0[\mathcal{A}V_t(x_t, \theta_t)] dt = E_0[V_\kappa(x_\kappa, \theta_\kappa)] - V_0(x_0, \theta_0).$$

Aplicando (6) e considerando que $\mathbf{Q}, \mathbf{S} \in \mathbb{M}^{n+}$, temos

$$-\int_{t=0}^{\kappa} E_0[x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T>t\}}]dt = E_0[V_\kappa(x_\kappa, \theta_\kappa)] - V_0(x_0, \theta_0).$$

Tomando o limite quando $\kappa \to \infty$ e definindo $\hat{Q}(i) = S(i)\mathbb{1}_{\{T=t\}} + Q(i)\mathbb{1}_{\{T>t\}}$, $\forall i \in \mathfrak{X}$ segue que

$$\lim_{\kappa\to\infty} \int_{t=0}^{\kappa} E_0[x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T\geq t\}}]dt \leq x_0' L(\theta_0) x_0,$$

uma vez que $E[V_\kappa(x_\kappa, \theta_\kappa)] > 0$, $\forall \kappa \geq 0$. Para algum $\delta > 0$, da inequação acima obtemos

$$\lim_{\kappa\to\infty} \int_{t=0}^{\kappa} E_0[\|x_t\|^2 \mathbb{1}_{\{T\geq t\}}]dt \leq \frac{1}{\delta} x_0' L(\theta_0) x_0 < \infty.$$

Portanto, o sistema $\mathcal{S}$ é τ-EE.

Assuma agora que, para $\tau = T_n$ a inequação

$$\lim_{\kappa\to\infty} \int_{t=0}^{\kappa} E_0[x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_n\geq t\}}]dt < \infty \tag{7}$$

seja válida. Assim, fixando $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, segue que $E_0[\|x_{T_n}\|^2] < \infty$.

Para $\tau = T_{n+1}$,

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to\infty} \int_{t=0}^{\kappa} & E_0[x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_{n+1}\geq t\}}]dt = \\ & \lim_{\kappa\to\infty} E_0[\int_{t=0}^{\kappa} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_n>t\}}dt + \int_{t=T_n}^{\kappa} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_n\leq t\leq T_{n+1}\}}dt].\end{aligned} \tag{8}$$

Note que, usando as propriedades de homogeneidade e a propriedade forte de Markov, o segundo termo, condicionado ao conhecimento de $\{x_{T_n}, \theta_{T_n}\}$, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to\infty} & E_{T_n}[\int_{t=T_n}^{\kappa} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_n\leq t\leq T_{n+1}\}}dt] = \\ & \lim_{\kappa\to\infty} E[\int_{t=0}^{\kappa-T_n} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{t\leq T_1\}}dt \mid x_0 = x_{T_n}, \theta_0 = \theta_{T_n}] < x_{T_n}' L(\theta_{T_n}) x_{T_n}.\end{aligned} \tag{9}$$

Logo, concluímos de (8) e (9) que

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to\infty} \int_{t=0}^{\kappa} E_0[x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_{n+1}\geq t\}}]dt &\leq \lim_{\kappa\to\infty} E_0[\int_{t=0}^{\kappa} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_n>t\}}dt + x_{T_n}' L(\theta_{T_n}) x_{T_n}] \\ &\leq \lim_{\kappa\to\infty} E_0[\int_{t=0}^{\kappa} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}}dt + x_{T_n}'(L(\theta_{T_n}) - Q(\theta_{T_n}))x_{T_n}] < \infty.\end{aligned}$$

Portanto, de (7) temos que o sistema é τ-EE.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Assuma que $\tau = T$ e defina o funcional

$$x_s' L(\theta_s) x_s := E_s\left[\int_{t=s}^{\infty} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T>t\}}dt + x_T' S_{\theta_T} x_T\right], \quad \forall (x_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}. \tag{10}$$

O lado direito de (10) pode ser expresso como

$$\begin{aligned}x_s' L_{\theta_s} x_s = E_s & \left[\int_{t=s}^{s+\Delta} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T>t\}}dt + \right. \\ & \left. E_{s+\Delta}\left[\left(\int_{t=s+\Delta}^{\infty} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T>t\}}dt + x_T' S_{\theta_T} x_T\right) \mathbb{1}_{\{T\geq s+\Delta\}}\right]\right].\end{aligned} \tag{11}$$

Adicionalmente,

$$E_{s+\Delta}\left[\left(\int_{t=s+\Delta}^{\infty} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T>t\}} + x_T' S(\theta_T) x_T\right) \mathbb{1}_{\{T\geq s+\Delta\}}\right] =$$
$$E_{s+\Delta}\left[\left(\int_{t=s+\Delta}^{\infty} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T>t\}} + x_T' S_{\theta_T} x_T\right) \mathbb{1}_{\{T> s+\Delta\}} + x_T' S_{\theta_T} x_T \mathbb{1}_{\{T=s+\Delta\}}\right]. \quad (12)$$

Desta forma, de acordo com a propriedade de Markov, aplicando homogeneidade em (12) e introduzindo-a em (11), temos que

$$x_s' L(\theta_s) x_s = E_s\left[\int_{t=s}^{s+\Delta} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T>t\}} dt + x_{s+\Delta}' L(\theta_{s+\Delta}) x_{s+\Delta} \mathbb{1}_{\{T>s+\Delta\}} + \right.$$
$$\left. x_T' S_{\theta_T} x_T \mathbb{1}_{\{T=s+\Delta\}}\right]. \quad (13)$$

Dividindo ambos os lados de (13) por Δ, e tomando o limite quando $\Delta \to 0$, obtemos

$$A_i' L_i + L_i A_i - \lambda_i L_i + \sum_{j\neq i} \lambda_{ij} S_i + Q_i = 0, \quad \forall i \in \mathfrak{X}, \quad (14)$$

uma vez que x_s é arbitrário. Logo, da teoria de estabilidade de Lyapunov, a existência do conjunto $\mathbf{P} \in \mathbb{M}^{n+}$ satisfazendo (4) está assegurada.

Para o caso geral ($\tau = T_N$) temos

$$E\left[\int_{t=0}^{\infty} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_N>t\}} + x_{T_N}' S(\theta_{T_N}) x_{T_N}\right] < \infty$$

o que implica, da propriedade forte de Markov, em

$$E_{T_n}\left[\int_{t=T_n}^{\infty} x_t' Q(\theta_t) x_t \mathbb{1}_{\{T_{m+1}>t\}} + x_{T_n}' S(\theta_{T_n}) x_{T_n}\right] < \infty, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (15)$$

Aplicando novamente a propriedade de homogeneidade, segue que (15) é equivalente à (10) com $x_0 = x_{T_n}$ e $\theta_0 = \theta_{T_n}$ e a existência de um conjunto de matrizes $\mathbf{P} \in \mathbb{M}^{n+}$ satisfazendo (4) está garantida. □

Nota 1. Se o sistema $\mathcal{S}$ tem um único modo de operação ($s = 1$), é deterministico e as condições (ii) e (iii) se reduzem à condição usual de estabilidade de sistemas lineares.

Nota 2. Mesmo que o sistema $\mathcal{S}$ possua modos de operação instáveis no sentido determinístico, ele pode ser τ-EE se a taxa de transição destes modos de operação é suficientemente grande para garantir que a condição (iii) no Teorema 1 seja verdadeira.

4 Conclusão

Neste trabalho estudamos a estabilidade estocástica de sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo contínuo limitada à ocorrência de um evento aleatório τ. Este evento representa a ocorrência de um número fixo de falhas ou reparos após as quais o sistema é paralisado para manutenção. O conceito de τ-estabilidade é empregado, tendo em vista que os conceitos usuais de estabilidade estocástica encontrados na literaruta referem-se a problemas com horizonte puramente infinito e não são adequados ao modelo proposto. São apresentadas condições necessárias e suficientes para a τ-estabilidade estocástica do sistema.

Referências

[1] W. P. Blair e D. D. Sworder, Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria, *International Journal of Control*, vol. 21, no. 5, pp. 833–841, 1975.

[2] O.L.V. Costa, J.B.R. do Val, e J.C. Geromel, A convex programming approach to H_2-control of discrete-time Markovian jump linear systems, *International Journal of Control*, vol. 66, no. 4, pp. 557–579, 1997.

[3] O.L.V. Costa, M.D. Fragoso e R.P. Marques, " Discrete-Time Markov Jump Linear Systems", Probability and its Applications, Springer, New York, 2005.

[4] J.B.R. do Val, C. Nespoli e Y.R.C. Zúñiga, Stochastic stability for Markovian jump linear systems associated with a finite number of jump times, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 285, pp. 553–565, 2003.

[5] Y. Ji, e H. J. Chizeck, Controllability, Stability, and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 7, pp. 777–788, 1990.

[6] N. N. Krasovskii e E. A. Lidiskii, Analytical design of controllers in systems with random atributes I,II, III,, *Automation Remote Contr.*, 22, pp. 1021–1025, 1141–1146, 1289–1294, 1961.

[7] W. H. Wonham, Random differential equations in control theory, *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, A.T. Bharucha-Reid (Ed.), vol. 2, pp. 131–212, Academic Press, New York, 1970.

[8] K. Zhou, J. C. Doyle e K. Glover, " Robust and Optimal Control", Prentice Hall, 1996.