ISSN 1984-820X

Localização dos Zeros dos Polinômios Ortogonais de Sobolev-Jacobi do Tipo I*

Mirela V. de Mello, **Cleonice F. Bracciali**, **Eliana X. L. de Andrade**,
DCCE, IBILCE, UNESP - Universidade Estadual Paulista
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: mirela_vanina@yahoo.com.br, cleonice@ibilce.unesp.br, eliana@ibilce.unesp.br.

Resumo: *Consideremos os polinômios ortogonais S_n associados ao seguinte produto interno de Sobolev*

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\theta_1(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\theta_2(x),$$

onde $d\theta_1$ e $d\theta_2$ são medidas positivas. Aqui $d\theta_1$ e $d\theta_2$ estão associadas com a medida de Jacobi $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, por esta razão os polinômios S_n são chamados de polinômios ortogonais de Sobolev-Jacobi. Neste trabalho mostramos que os polinômios ortogonais de Sobolev-Jacobi têm n zeros reais e distintos e, obtemos a localização destes zeros com relação à localização dos zeros de outros polinômios ortogonais, em particular, dos polinômios ortogonais de Jacobi.

Palavras-chave: *Polinômios ortogonais, polinômios ortogonais de Sobolev, zeros de polinômios*

1 Introdução

Uma seqüência de polinômios $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é chamada de seqüência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$ no intervalo (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, se P_n^ϕ é de grau exatamente n e

$$\left\langle P_m^\phi, P_n^\phi \right\rangle_\phi = \int_a^b P_m^\phi(x)P_n^\phi(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \rho_n^\phi > 0, & \text{para } m = n \end{cases}. \tag{1}$$

Estes polinômios possuem muitas propriedades, as mais importantes delas é que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos e seus zeros são reais, distintos e estão no intervalo (a, b).

Por exemplo, os polinômios de Jacobi denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}$, que são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à medida

$$d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha > -1, \;\; \beta > -1.$$

Eles podem ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(x - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\right) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

para $n \geq 1$, onde

$$\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)},$$

*Trabalho com apoio do CNPq e da FAPESP

$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x + \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2}$.

Uma seqüência de polinômios, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, ortogonal com relação ao produto interno

$$\langle f,g\rangle_{\mathbb{S}} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\theta_1(x) + \lambda\int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\theta_2(x),$$

onde $\lambda \geq 0$ é chamada seqüência de polinômios ortogonais de Sobolev. Estes polinômios, em geral, não satisfazem as mesmas propriedades dos polinômios ortogonais associados ao produto interno (1), como por exemplo, eles não possuem uma relação de recorrência de três termos e os zeros destes polinômios podem não ser reais e simples.

Em [2], Iserles *et al.* introduzem o conceito de par coerente de medidas, ou seja, se existem constantes não nulas σ_n, $n \geq 1$, tais que os polinômios ortogonais associados às medidas $d\theta_1$ e $d\theta_2$ satisfazem para $n \geq 1$,

$$P_n^{\theta_2}(x) = \frac{1}{n+1}\left\{ [P_{n+1}^{\theta_1}(x)]' + \sigma_n [P_n^{\theta_1}(x)]' \right\},$$

dizemos que $\{d\theta_1, d\theta_2\}$ é um par coerente de medidas. Utilizando este conceito, encontram a seguinte relação para os polinômios ortogonais de Sobolev, para $n \geq 0$,

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) \;=\; P_{n+1}^{\theta_1}(x) + \sigma_n P_n^{\theta_1}(x). \tag{2}$$

No trabalho de Meijer [3], os pares coerentes de medidas foram completamente determinados, em particular, Meijer estabeleceu que há somente quatro tipos de pares coerentes de medidas envolvendo a medida de Jacobi, por exemplo, o par coerente do tipo I é dado por

$$d\theta_1(x) = |x-\xi|(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,\; d\theta_2(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \text{ com } |\xi|>1,\ \alpha>-1 \text{ e } \beta>-1.$$

No trabalho de Berti, Bracciali e Sri Ranga [1], foi introduzida uma nova abordagem para estudar os polinômios ortogonais de Sobolev, que possibilitou estender os resultados além do conceito de par coerente e, ainda manter uma relação da forma (2). Para os polinômios de Jacobi, encontramos em [1], o seguinte resultado.

Teorema 1. *Os polinômios ortogonais mônicos associados ao produto interno*

$$\langle f,g\rangle_{\mathbb{SJ}_1} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1+\kappa_1+\kappa x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(\kappa_2+\kappa_3 x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \tag{3}$$

chamados aqui de polinômios ortogonais de Sobolev-Jacobi do tipo I, S_n, satisfazem, para $n \geq 0$,

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + b_n P_n^{\psi_0}(x),$$

com $S_0(x) = 1$, $a_n = \dfrac{b_n\rho_n^{\psi_0} + n(n+1)\kappa_3\rho_n^{(\alpha+1,\beta+1)}}{\rho_n^{\mathbb{SJ}_1}}$, $b_n = \kappa\dfrac{\rho_{n+1}^{(\alpha,\beta)}}{\rho_n^{\psi_0}}$ e $d\psi_0(x) = (1+\kappa x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$. Aqui $-1 \leq \kappa \leq 1$, $\kappa_2 \geq |\kappa_3|$, $1+\kappa_1 \geq |\kappa| > 0$ e para $\kappa = 0$, $1+\kappa_1 > 0$.

Quando $\kappa_3 = 0$ e $\kappa \neq 0$ as medidas

$$d\theta_1(x) = \left| x + \frac{1+\kappa_1}{\kappa} \right| (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx \tag{4}$$

formam par coerente de Jacobi do tipo I com $\xi = -\dfrac{1+\kappa_1}{\kappa}$ e $\lambda = \dfrac{\kappa_2}{|\kappa|}$ e quando $\kappa_3 \neq 0$ estas medidas não formam par coerente.

Para estudar a localização dos zeros dos polinômios de Sobolev-Jacobi do tipo I, consideramos alguns resultados preliminares.

2 Resultados Preliminares

Para $n \geq 0$ e $i \geq 0$, definimos para $|\kappa| \leq 1$ e $\kappa \neq 0$

$$m_i^{(n)}=\int_{-1}^{1} S_n(x)(1+\kappa x)^i(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad \text{e} \quad \tilde{m}_i^{(n)}=\int_{-1}^{1} S_n'(x)(1+\kappa x)^i(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \quad (5)$$

e para $\kappa = 0$ definimos

$$m_i^{(n)}=\int_{-1}^{1} S_n(x)[x+sgn(\kappa_3)]^i(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad \text{e} \quad \tilde{m}_i^{(n)}=\int_{-1}^{1} S_n'(x)[x+sgn(\kappa_3)]^i(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \quad (6)$$

onde $sgn(\kappa_3) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad \kappa_3 < 0 \\ 1, & \text{se} \quad \kappa_3 > 0 \end{cases}$.

Precisamos encontrar os sinais de $m_i^{(n)}$ e $\tilde{m}_i^{(n)}$ que denotaremos por $sgn(m_i^{(n)})$ e $sgn(\tilde{m}_i^{(n)})$, respectivamente, e para isso utilizamos os próximos três lemas.

Lema 1. *Consideremos* (5) *e* (6). *Então,*

a) para $n \geq 1$ *e* $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

i) quando $|\kappa| \leq 1$ *e* $\kappa \neq 0$, $\quad m_{i+1}^{(n)} + \kappa_1 m_i^{(n)} = -i\kappa_3 \tilde{m}_i^{(n)} + i(\kappa_3 - \kappa\kappa_2)\tilde{m}_{i-1}^{(n)}$,

ii) quando $\kappa = 0$, $\quad m_i^{(n)} = -\dfrac{i}{1+\kappa_1}\left\{\kappa_3 \tilde{m}_i^{(n)} + (\kappa_2 - |\kappa_3|)\,\tilde{m}_{i-1}^{(n)}\right\}$,

b) para $n \geq 1$ *e* $i \geq 0$,

i) quando $|\kappa| \leq 1$ *e* $\kappa \neq 0$,

$$\tilde{m}_i^{(n)} = \frac{1}{\kappa}\left\{(i+\alpha+\beta+2)m_{i+1}^{(n)} - [2i+(\alpha+1)(1-\kappa)+(\beta+1)(1+\kappa)]m_i^{(n)} + i(1-\kappa^2)m_{i-1}^{(n)}\right\},$$

ii) quando $\kappa = 0$,

$$\tilde{m}_i^{(n)} = (i+\alpha+\beta+2)m_{i+1}^{(n)} - \left\{2sgn(\kappa_3)i+(\beta+1)[1+sgn(\kappa_3)] - (\alpha+1)[1-sgn(\kappa_3)]\right\} m_i^{(n)}.$$

Para demonstrarmos o item (a) deste lema, utilizamos a propriedade $\langle S_n, (1+\kappa x)^i \rangle_{\mathbb{S}\mathbb{J}_1} = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, e as definições de $m_i^{(n)}$ e $\tilde{m}_i^{(n)}$. E o item (b) demonstramos integrando $\tilde{m}_i^{(n)}$ por partes e utilizando a definição de $m_i^{(n)}$.

Substituímos os resultados do item (b) em (a) do lema anterior e obtemos as seguintes relações de recorrência para $m_i^{(n)}$.

Lema 2. *Para* $n \geq 2$ *e* $i = 1, \ldots, n-1$,

i) $m_{i+1}^{(n)} = -\dfrac{A_i m_i^{(n)} - B_i m_{i-1}^{(n)} + C_i m_{i-2}^{(n)}}{1 + i\kappa_3\kappa^{-1}(i+\alpha+\beta+2)}$, *quando* $|\kappa| \leq 1$ *e* $\kappa \neq 0$, *onde*

$$A_i = \left(\kappa_2 - 3\frac{\kappa_3}{\kappa}\right) i^2 + \left\{\kappa_2(\alpha+\beta+1) - \frac{\kappa_3}{\kappa}\left[\alpha(2-\kappa)+\beta(2+\kappa)+3\right]\right\} i + \kappa_1,$$

$$B_i = \left[2\kappa_2 - \frac{\kappa_3}{\kappa}(3-\kappa^2)\right] i^2 + \left(\kappa_2 - \frac{\kappa_3}{\kappa}\right)\left[\alpha(1-\kappa)+\beta(1+\kappa)\right] i \quad e$$

$$C_i = \left(\kappa_2 - \frac{\kappa_3}{\kappa}\right)(1-\kappa^2)i(i-1),$$

ii) $m_{i+1}^{(n)} = -\dfrac{A_i m_i^{(n)} - B_i m_{i-1}^{(n)}}{\kappa_3(i+\alpha+\beta+2)}$, *quando* $\kappa = 0$, *onde*

$$A_i = (\kappa_2 - 3|\kappa_3|)\, i + \kappa_2(\alpha+\beta+1) - \kappa_3 \{(\alpha+\beta+3)sgn(\kappa_3) + \beta[1+sgn(\kappa_3)] - \alpha[1-sgn(\kappa_3)]\} + \frac{1+\kappa_1}{i},$$

$$B_i = (\kappa_2 - |\kappa_3|) \Big\{ 2sgn(\kappa_3)i + \beta[1+sgn(\kappa_3)] - \alpha[1-sgn(\kappa_3)] \Big\}.$$

A localização dos zeros quando as medidas $d\theta_1$ e $d\theta_2$ em (4) formam par coerente de Jacobi do tipo I, foi estudado no trabalho de Meijer e de Bruin [4]. Nosso objetivo neste trabalho é estudar a localização dos zeros quando estas medidas não formam par coerente. Para isso, vamos impor algumas condições para os parâmetros usados de forma a encontrar os sinais dos coeficientes A_i, B_i e C_i para $\kappa \neq 0$ e A_i e B_i para $\kappa = 0$. Consideramos então,

$$-1 \leq \kappa < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \kappa \leq 1, \quad \kappa_1 \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0 \quad \text{e} \quad \kappa_2 > 3\frac{\kappa_3}{\kappa} \geq 0, \tag{7}$$

e obtemos o seguinte resultado.

Lema 3. *Considerando* (7), *temos para* $n \geq 1$, *que*

i) $A_i > 0$, $B_i > 0$ *e* $C_i \geq 0$, $i \geq 1$,

ii) $sgn(m_i^{(n)}) = (-1)^{n+i}[sgn(\kappa_3)]^n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *e quando* $\kappa_1 = 0$ *temos* $m_1^{(n)} = 0$,

iii) $sgn(\tilde{m}_i^{(n)}) = (-1)^{n+i+1}[sgn(\kappa_3)]^{n+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Demonstração:
i) Segue das condições em (7) que $A_i > 0$, $B_i > 0$ e $C_i \geq 0$.
ii) Pela relação entre os polinômios de Sobolev e de Jacobi, dada no Teorema 1, temos

$$\int_{-1}^{1} S_{n+1}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + a_n \int_{-1}^{1} S_n(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = 0$$

logo, $m_0^{(n+1)} = -a_n m_0^{(n)}$, $n \geq 0$. Além disso, como $m_0^{(0)} > 0$, encontramos $sgn(m_0^{(n)}) = (-1)^n[sgn(a_n)]^n$.

Utilizando o item (i) do Lema 2 e indução matemática, temos que para $i = 0, 1, \ldots, n$, $sgn(m_i^{(n)}) = (-1)^{n+i}[sgn(a_n)]^n$, além disso, $m_1^{(n)} = -\kappa_1 m_0^{(n)}$, e pelas relações para a_n e b_n, dadas no Teorema 1, temos que $sgn(a_n) = sgn(\kappa_3)$.
iii) Finalmente, utilizando esses resultados em (i) do item (b) do Lema 1 e indução matemática, temos que $sgn(\tilde{m}_i^{(n)}) = (-1)^{n+i+1}[sgn(\kappa_3)]^{n+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. ∎

De forma análoga, para $\kappa = 0$, consideramos

$$\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0, \ 1 + \kappa_1 > 0 \ \text{ e } \ \kappa_2 > 3|\kappa_3| \tag{8}$$

e obtemos o seguinte resultado.

Lema 4. *Com as condições* (8) *temos para* $n \geq 1$, *que*

i) os coeficientes A_i *são positivos e os coeficientes* B_i *têm o mesmo sinal de* κ_3,

ii) $sgn(m_i^{(n)}) = (-1)^{n+i}\,[sgn(\kappa_3)]^{n+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *e* $m_0^{(n)} = 0$,

iii) $sgn(\tilde{m}_i^{(n)}) = (-1)^{n+i+1}\,[sgn(\kappa_3)]^{n+i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Nos lemas a seguir obtemos os sinais de certas integrais definidas, que serão fundamentais para estudarmos a localização dos zeros dos polinômios S_n.

Lema 5. *Para $n \geq 2$ consideremos π_{r_1} e π_{r_2} polinômios mônicos de grau r_1 e r_2, respectivamente, com $2 \leq r_1 \leq n$ e $1 \leq r_2 \leq n-1$, tal que todos os zeros de π_{r_1} e π_{r_2} são reais e estão no intervalo $(-1,1)$. Sejam*

$$I_1=\int_{-1}^{1} S_n(x)\pi_{r_1}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad e \quad I_2=\int_{-1}^{1} S_n(x)\pi_{r_2}(x)\left(x+\frac{1}{\kappa}\right)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,$$

então $sgn(I_1) = (-1)^{n+r_1}[sgn(\kappa_3)]^{n+r_1}$ e $sgn(I_2) = (-1)^{n+r_2+1}[sgn(\kappa_3)]^{n+r_2+1}$, desde que as condições (7) e (8) sejam satisfeitas.

Demonstração: Sejam $-1 < t_{r_1,1} \leq t_{r_1,2} \leq \cdots \leq t_{r_1,r_1} < 1$ os zeros de π_{r_1}, então podemos escrever $\pi_{r_1}(x) = \sum_{i=0}^{r_1} c_i\left(x+\frac{1}{\kappa}\right)^i$, para $\kappa \neq 0$ e $\pi_{r_1}(x) = \sum_{i=0}^{r_1} c_i[x+sgn(\kappa_3)]^i$, para $\kappa = 0$, onde $c_{r_1} = 1$.

Como $sgn(\kappa) = sgn(\kappa_3)$, então se $c_i \neq 0$, $sgn(c_i) = (-1)^{r_1-i}[sgn(\kappa_3)]^{r_1-i}$, $i = 0, 1, \ldots, r_1$. Logo, $I_1 = \sum_{i=0}^{r_1} \frac{c_i}{\kappa^i} m_i^{(n)}$, para $\kappa \neq 0$ e $I_1 = \sum_{i=0}^{r} c_i m_i^{(n)}$, para $\kappa = 0$.

Assim, considerando os sinais de $m_i^{(n)}$ dados nos Lemas 3 e 4 e os sinais de c_i e κ_3, obtemos $sgn(I_1) = ((-1)^{n+r_1}[sgn(\kappa_3)]^{n+r_1}$.

Obtemos o sinal de I_2 de forma análoga ao caso $\kappa \neq 0$. ■

3 Localização dos Zeros

Mostramos agora que quando as condições (7) ou (8) são satisfeitas, os polinômios de Sobolev-Jacobi, S_n, têm n zeros reais e distintos e, além disso, determinamos a localização desses zeros com relação aos zeros dos polinômios de Jacobi e, quando $\kappa \neq 0$, com relação aos zeros dos polinômios ortogonais $P_n^{\psi_0}$.

Teorema 2. *Se as condições (7) ou (8) são satisfeitas, então para $n \geq 2$,*

i) S_n tem n zeros reais, distintos e no máximo um deles fora do intervalo $(-1,1)$,

ii) os zeros de S_n se entrelaçam com os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$, sendo para $\kappa_3 < 0$,

$$s_{n,1} < p_{n,1}^{(\alpha,\beta)} < s_{n,2} < p_{n,2}^{(\alpha,\beta)} < \cdots < s_{n,n} < p_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$$

e para $\kappa_3 > 0$,

$$p_{n,1}^{(\alpha,\beta)} < s_{n,1} < p_{n,2}^{(\alpha,\beta)} < s_{n,2} < \cdots < p_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < s_{n,n}.$$

Demonstração: Seja $p_{n,j}^{(\alpha,\beta)}$ um zero de $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Tomando $r_1 = n-1$ e $\pi_{n-1}(x) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-p_{n,j}^{(\alpha,\beta)}}$ no Lema 5, obtemos $I_1 = \int_{-1}^{1} S_n(x)\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-p_{n,j}^{(\alpha,\beta)}}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$, onde $sgn(I_1) = -sgn(\kappa_3)$. Aplicamos a fórmula de quadratura gaussiana nos n zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e para $j = 1, 2, \ldots, n$ obtemos $I_1 = W_{n,j}S_n(p_{n,j}^{(\alpha,\beta)})[P_n^{(\alpha,\beta)}(p_{n,j}^{(\alpha,\beta)})]'$, onde $W_{n,j} > 0$ são os pesos da fórmula de quadratura.

Assim, quando $\kappa_3 < 0$ temos $I_1 > 0$ e então $S_n(p_{n,j}^{(\alpha,\beta)})[P_n^{(\alpha,\beta)}(p_{n,j}^{(\alpha,\beta)})]' > 0$. Logo, como $[P_n^{(\alpha,\beta)}]'$ tem sinal oposto em dois zeros consecutivos de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ o mesmo acontece com S_n, então

S_n tem pelo menos um zero em cada um dos $n-1$ intervalos $(p_{n,i-1}^{(\alpha,\beta)}, p_{n,i}^{(\alpha,\beta)})$, para $i = 2, 3, \ldots, n$. Por absurdo, mostramos que S_n possui somente um zero em cada intervalo $(p_{n,i-1}^{(\alpha,\beta)}, p_{n,i}^{(\alpha,\beta)})$, não possui zeros complexos e como S_n é mônico, não possui zeros em $(p_n^{(\alpha,\beta)}, +\infty)$, logo a única possibilidade é S_n ter um zero em $(-\infty, p_{n,1}^{(\alpha,\beta)})$. Logo, S_n tem n zeros reais, distintos e $s_{n,1} < p_{n,1}^{(\alpha,\beta)} < s_{n,2} < p_{n,2}^{(\alpha,\beta)} < \cdots < s_{n,n} < p_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$, além disso, como $p_{n,1}^{(\alpha,\beta)}, p_{n,2}^{(\alpha,\beta)}, \ldots, p_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$ estão no intervalo $(-1, 1)$, então no máximo $s_{n,1}$ está fora deste intervalo.

Quando $\kappa_3 > 0$, a demonstração é análoga. ■

Teorema 3. *Se as condições* (7) *ou* (8) *são satisfeitas, então para* $n \geq 2$,

i) os zeros de S_n se entrelaçam com os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$, com os zeros de S_n à esquerda dos respectivos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$, ou seja,

$$s_{n,1} < p_{n,1}^{(\alpha,\beta+1)} < s_{n,2} < p_{n,2}^{(\alpha,\beta+1)} < \cdots < s_{n,n} < p_{n,n}^{(\alpha,\beta+1)},$$

ii) os zeros de S_n se entrelaçam com os zeros de $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$, com os zeros de S_n à direita dos respectivos zeros de $P_n^{(\alpha+1,\beta)}$, ou seja,

$$p_{n,1}^{(\alpha+1,\beta)} < s_{n,1} < p_{n,2}^{(\alpha+1,\beta)} < s_{n,2} < \cdots < p_{n,n}^{(\alpha+1,\beta)} < s_{n,n},$$

iii) os zeros de $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}$ separam os zeros de S_n, ou seja,

$$s_{n,1} < p_{n-1,1}^{(\alpha+1,\beta+1)} < s_{n,2} < \cdots < s_{n,n-1} < p_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} < s_{n,n}.$$

Para demonstrar este teorema, usamos o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 2.

Como os zeros dos polinômios de Jacobi estão no intervalo $(-1, 1)$, então de (i) e (ii) do teorema anterior, podemos concluir que os zeros de S_n também pertencem a este intervalo. E temos o seguinte resultado.

Corolário 3.1. *Quando as condições* (7) *ou* (8) *são satisfeitas, todos os zeros de S_n estão no intervalo* $(-1, 1)$.

Teorema 4. *Se as condições* (7)*ou* (8) *são satisfeitas, então para $n \geq 2$, os $n-1$ zeros de S_{n-1} separam os zeros de S_n, ou seja,*

$$s_{n,1} < s_{n-1,1} < s_{n,2} < \cdots < s_{n,n-1} < s_{n-1,n-1} < s_{n,n}.$$

Demonstração: Pela relação entre os polinômios de Sobolev e Jacobi, dadas no Teorema 1, temos $S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $n \geq 1$, assim, se $s_{n,j}$ é um zero de S_n, $a_{n-1}S_{n-1}(s_{n,j}) = P_n^{(\alpha,\beta)}(s_{n,j})$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Se $\kappa_3 < 0$, pelo Teorema 2 obtemos para $j = 1, 2, \ldots, n$, $S_n(p_{n,j}^{(\alpha,\beta)})[P_n^{(\alpha,\beta)}(p_{n,j}^{(\alpha,\beta)})]' > 0$, que é equivalente a $S_n'(s_{n,j})P_n^{(\alpha,\beta)}(s_{n,j}) < 0$, assim, $S_n'(s_{n,j})a_{n-1}S_{n-1}(s_{n,j}) < 0$ e como $sgn(a_{n-1}) = sgn(\kappa_3)$ e κ_3 é negativo, concluímos que $S_n'(s_{n,j})S_{n-1}(s_{n,j}) > 0$. Da mesma forma para $\kappa_3 > 0$, obtemos a mesma desigualdade.

Logo, como S_n' tem sinal oposto nos zeros consecutivos de S_n, o mesmo acontece com S_{n-1}, além disso, como S_n é mônico temos que $S_n'(s_{n,n}) > 0$ o que implica que $S_{n-1}(s_{n,n}) > 0$. Portanto, S_{n-1} tem um zero entre dois zeros consecutivos de S_n. ■

Para $|\kappa| \leq 1$ e $\kappa \neq 0$, temos ainda o seguinte resultado.

Teorema 5. *Consideremos* $\{P_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ *a seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a* $d\psi_0(x) = (1+\kappa x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$. *Se as condições* (7) *são satisfeitas então, para* $n \geq 2$,

i) os zeros de $P_n^{\psi_0}$ *se entrelaçam com os zeros de* S_n, *sendo para* $\kappa_3 < 0$,

$$p_{n,1}^{\psi_0} < s_{n,1} < p_{n,2}^{\psi_0} < s_{n,2} < \cdots < p_{n,n}^{\psi_0} < s_{n,n},$$

e para $\kappa_3 > 0$,

$$s_{n,1} < p_{n,1}^{\psi_0} < s_{n,2} < p_{n,2}^{\psi_0} < \cdots < s_{n,n} < p_{n,n}^{\psi_0},$$

ii) os $n-1$ *zeros de* $P_{n-1}^{\psi_0}$ *separam os zeros de* S_n, *isto é,*

$$s_{n,1} < p_{n-1,1}^{\psi_0} < s_{n,2} < \cdots < s_{n,n-1} < p_{n-1,n-1}^{\psi_0} < s_{n,n}.$$

A demonstração deste teorema é feita de modo análoga à demonstração do Teorema 2, utilizando a integral I_2 do Lema 5.

4 Considerações Finais

Neste trabalho mostramos que, quando os parâmetros envolvidos no produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{SJ}_1}$ em (3), satisfazem às condições (7), os polinômios ortogonais de Sobolev-Jacobi do tipo I, S_n, têm n zeros reais, distintos e estão no intervalo $(-1,1)$. Vimos que os zeros destes polinômios se entrelaçam com os zeros dos polinômios ortogonais com relação à $d\psi_0$ e com os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, onde a localização destes zeros depende do sinal do parâmetro κ. Mostramos também, que os $n-1$ zeros dos polinômios $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}$ e S_{n-1} separam os zeros de S_n.

Quando $\kappa = 0$, obtemos resultados semelhantes aos anteriores, considerando (8). Neste caso, dependendo do sinal do parâmetro κ_3, os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev-Jacobi estão à direita ou à esquerda do respectivos zeros dos polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}$.

Referências

[1] A.C. Berti, C.F. Bracciali, A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials associated with related measures and Sobolev orthogonal polynomials, *Numer. Algorithms,* 34 (2003) 203-216.

[2] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Nørsett, J.M. Sanz-Serna, On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products, *J. Approx. Theory,* 65 (1991) 151-175.

[3] H.G. Meijer, Determination of all coherent pairs, *J. Approx. Theory,* 89 (1997) 321-343.

[4] H.G. Meijer, M.G. de Bruin, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs, *J. Comput. Appl. Math.,* 139 (2002) 253-274.