Monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev

Dimitar K. Dimitrov,
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
São José do Rio Preto, SP

Francisco Marcellán,
Departamento de Matemáticas, Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III,
Leganés-Madrid, Spain

Fernando R. Rafaeli
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP,
Campinas, SP
E-mail: fe_ro_rafaeli@hotmail.com

Resumo: *Denote por $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do polinômio ortogonal do tipo Laguerre-Sobolev $L_n^{(\alpha,M,N)}(x)$ com relação ao produto interno*

$$\langle p, q\rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + Mp(0)q(0) + Np'(0)q'(0)$$

onde $\alpha > -1$, $M \geq 0$ e $N \geq 0$. Em [1] provamos que $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$ interlaça com os zeros do polinômio ortogonal de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ e estabelecemos monotonicidade com relação aos parâmetros M e N de $x_{n,k}^{M,0}(\alpha)$ e $x_{n,k}^{0,N}(\alpha)$. Mais ainda, encontramos N_0 tal que $x_{n,n}^{M,N}(\alpha) < 0$ para todo $N > N_0$, onde $x_{n,n}^{M,N}(\alpha)$ é o menor zero de $L_n^{(\alpha,M,N)}(x)$. Além disso, obtemos monotonicidade e relações assintóticas de certas funções envolvendo $x_{n,k}^{M,0}(\alpha)$ e $x_{n,k}^{0,N}(\alpha)$.

Palavras-chave: *Polinômios ortogonais, polinômios de Laguerre, polinômios do tipo Laguerre-Sobolev, zeros, monotonicidade, assintótica.*

Introdução e Resultados

Considere a sequência de polinômios do tipo Laguerre-Sobolev $\{L_n^{(\alpha,M,N)}(x)\}_{n=0}^\infty$ que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q\rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + Mp(0)q(0) + Np'(0)q'(0), \tag{1}$$

onde $\alpha > -1$, $M \geq 0$ e $N \geq 0$. Eles foram definidos e estudados primeiramente por Koekoek e Meijer [4], onde obtiveram a seguinte representação

$$L_n^{(\alpha,M,N)}(x) = A_n L_n^{(\alpha)}(x) + B_n \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) + C_n \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(\alpha)}(x), \tag{2}$$

onde

$$A_n = A_n^{(M,N)}(\alpha) = 1 + M\binom{n+\alpha}{n-1} + \frac{n(\alpha+2)-(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)}N\binom{n+\alpha}{n-2} + \frac{MN}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\binom{n+\alpha}{n-1}\binom{n+\alpha+1}{n-2},$$

$$B_n = B_n^{(M,N)}(\alpha) = M\binom{n+\alpha}{n} + \frac{n-1}{\alpha+1}N\binom{n+\alpha}{n-1} + \frac{2MN}{(\alpha+1)^2}\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\alpha+1}{n-2},$$

$$C_n = C_n^{(M,N)}(\alpha) = \frac{N}{\alpha+1}\binom{n+\alpha}{n-1} + \frac{MN}{(\alpha+1)^2}\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\alpha+1}{n-1},$$

e $L_n^{(\alpha)}(x)$ é o $n-$ésimo polinômio ortogonal de Laguerre.

Dueñas e Marcellán [3] consideraram os polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev $\widehat{L}_n^{(\alpha,\widehat{M},\widehat{N})}(x)$ gerados pelo produto interno

$$\langle p,q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + \widehat{M}p(0)q(0) + \widehat{N}p'(0)q'(0), \tag{3}$$

onde $\alpha > -1$, $\widehat{M} \geq 0$ e $\widehat{N} \geq 0$. É claro que as sequências $\{L_n^{(\alpha,M,N)}(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{\widehat{L}_n^{(\alpha,\widehat{M},\widehat{N})}(x)\}_{n=0}^\infty$ coincidem quando $\widehat{M} = \Gamma(\alpha+1)M$ e $\widehat{N} = \Gamma(\alpha+1)N$. Portanto todos os resultados com relação aos zeros de $L_n^{(\alpha,M,N)}(x)$ obtidos neste trabalho podem ser reescritos em uma óbvia maneira substituindo M por $\widehat{M}/\Gamma(\alpha+1)$ e N por $\widehat{N}/\Gamma(\alpha+1)$.

Denote por $x_{n,k}(\alpha)$ os zeros do polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ e por $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$, $x_{n,k}^{M}(\alpha)$ e $x_{n,k}^{N}(\alpha)$ os zeros de $L_n^{(\alpha,M,N)}(x)$, $L_n^{(\alpha,M,0)}(x)$ e $L_n^{(\alpha,0,N)}(x)$, respectivamente, todos arranjados em ordem decrescente. Provamos que os zeros $x_{n,k}^{M,N}(\alpha)$ se interlaçam com os zeros $x_{n,k}(\alpha)$ quando $M, N > 0$ e estabelecemos monotonicidade dos zeros $x_{n,k}^{M}(\alpha)$ e $x_{n,k}^{N}(\alpha)$ com respeito aos parâmetros M e N, respectivamente.

Teorema 1 *As desigualdades*

$$x_{n,k+1}^{M,N}(\alpha) < x_{n,k+1}(\alpha) < x_{n,k}^{M,N}(\alpha) < x_{n,k}(\alpha) \tag{4}$$

seguem para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *e cada* k *com* $1 \leq k \leq n-1$. *Mais ainda, para cada fixo* n *o menor zero* $x_{n,n}^{M,N}(\alpha)$ *satisfaz*

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha) > 0, \quad \text{para} \quad N < N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha) = 0, \quad \text{para} \quad N = N_0,$$

$$x_{n,n}^{M,N}(\alpha) < 0, \quad \text{para} \quad N > N_0,$$

onde

$$N_0 = \frac{(\alpha+1)\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(n+\alpha+2)}. \tag{5}$$

É interessante observar que N_0 não depende de M. No caso em que $N = 0$ nós obtemos o seguinte resultado que já tinha sido descoberto por Dueñas e Marcellán [2].

Corolário 1 *As desigualdades*

$$0 < x_{n,k+1}^M(\alpha) < x_{n,k+1}(\alpha) < x_{n,k}^M(\alpha) < x_{n,k}(\alpha) \tag{6}$$

são válidas para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *e cada* k *com* $1 \leq k \leq n-1$. *Mais ainda, os zeros* $x_{n,k}^M(\alpha)$ *são funções decrescentes de* M *e o menor zero* $x_{n,n}^M(\alpha)$ *se comporta como* $\mathcal{O}(1/M)$ *quando* M *tende a infinito.*

Quando $M = 0$ o Teorema 1 implica em:

Corolário 2 *As desigualdades*

$$x_{n,k+1}^N(\alpha) < x_{n,k+1}(\alpha) < x_{n,k}^N(\alpha) < x_{n,k}(\alpha) \tag{7}$$

são válidas para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *e cada* k *com* $1 \leq k \leq n-1$. *Mais ainda, os zeros* $x_{n,k}^N(\alpha)$ *são funções decrescentes de* N *e o menor zero* $x_{n,n}^N(\alpha)$ *satisfaz*

$$x_{n,n}^N(\alpha) > 0, \quad \text{para} \quad N < N_0,$$

$$x_{n,n}^N(\alpha) = 0, \quad \text{para} \quad N = N_0,$$

$$x_{n,n}^N(\alpha) < 0, \quad \text{para} \quad N > N_0,$$

onde N_0 *é dado por (5).*

Fazendo $N_0 = \widehat{N}_0/\Gamma(\alpha+1)$, concluímos que o menor zero $\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha)$ do $n-$ésimo polinômio ortogonal do tipo Laguerre-Sobolev definido por Dueñas e Marcellán [3] satisfaz

$$\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha) > 0, \quad \text{para} \quad \widehat{N} < \widehat{N}_0,$$

$$\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha) = 0, \quad \text{para} \quad \widehat{N} = \widehat{N}_0,$$

$$\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha) < 0, \quad \text{para} \quad \widehat{N} > \widehat{N}_0,$$

onde

$$\widehat{N}_0 = \Gamma(\alpha+1)N_0 = \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(n+\alpha+2)}. \tag{8}$$

Resultados numéricos foram fornecidos em [3] a fim de determinar os valores $\widehat{N}$ para o qual $\widehat{x}_{n,n}^{\widehat{N}}(\alpha)$ é positivo (negativo). Comentemos que aqueles resultados numéricos de $\widehat{N}_0$ coincidem com a nossa expressão explícita de (8).

Foi provado em [2] que $x_{n,k}^M(\alpha) \to x_{n-1,k}(\alpha+2)$ quando $M \to \infty$, para cada $k = 1, \ldots, n-1$. Nós fornecemos um resultado muito interessante a respeito do comportamento assintótico das diferenças $x_{n,k}^M(\alpha) - x_{n-1,k}(\alpha+2)$.

Teorema 2 *Para cada* $n \geq 2$,

$$\lim_{M\to\infty} M x_{n,n}^M(\alpha) = (\alpha+2)g_n(\alpha)$$

e

$$\lim_{M\to\infty} M[x_{n,k}^M(\alpha) - x_{n-1,k}(\alpha+2)] = g_n(\alpha), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{9}$$

onde

$$g_n(\alpha) = \frac{\alpha+1}{(\alpha+2)\binom{n+\alpha+1}{n-1}}. \tag{10}$$

É surpreendente que o limite $g_n(\alpha)$ em (9) não depende de k.

Teorema 3 *Para cada $n \geq 2$, as quantidades*

$$M[x_{n,1}^M(\alpha) - x_{n-1,1}(\alpha+2)] \tag{11}$$

são funções crescentes de $M > 0$.

De fato, experimentos numéricos mostram que as quantidades $Mx_{n,n}^M(\alpha)$ e

$$M[x_{n,k}^M(\alpha) - x_{n-1,k}(\alpha+2)]$$

são funções crescentes de $M > 0$ para cada k com $1 \leq k \leq n-1$.

Tendo em mente os limites no Teorema 2 e a monotonicidade no Teorema 3, obtemos:

Corolário 3 *As desigualdades*

$$x_{n,1}^M(\alpha) \leq x_{n-1,1}(\alpha+2) + g_n(\alpha)/M$$

são válidas para cada $M > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.

A fim de formular o resultado correspondente sobre o comportamento assintótico de $x_{n,k}^N$, definimos o polinômio

$$\begin{aligned} F_{n,\alpha}(x) \quad := \quad & -\frac{n(\alpha+2)-(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)}\binom{n+\alpha}{n-2}L_n^{(\alpha)}(x) \\ & -\frac{n-1}{\alpha+1}\binom{n+\alpha}{n-1}\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{1}{\alpha+1}\binom{n+\alpha}{n-1}\frac{d^2}{dx^2}L_n^{(\alpha)}(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Teorema 4 *Para cada $n \geq 2$ e cada $\alpha > -1$, o polinômio $F_{n,\alpha}(x)$ possui somente zeros reais e distintos o qual denotamos por $\zeta_{n,k}(\alpha)$, ordenados em ordem decrescente. Então $x_{n,k}^N(\alpha) \to \zeta_{n,k}(\alpha)$ com $N \to \infty$. Mais ainda,*

$$\lim_{N\to\infty} N[x_{n,k}^N(\alpha) - \zeta_{n,k}(\alpha)] = g_{n,k}(\alpha), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

onde

$$\begin{aligned} g_{n,k}(\alpha) \quad = \quad & \binom{n+\alpha}{n-1}\frac{(n-1)(n+\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2}\times \\ & \frac{a_n(\alpha)[\zeta_{n,k}(\alpha)]^2 + b_n(\alpha)\zeta_{n,k}(\alpha) + c_n(\alpha)}{n[\zeta_{n,k}(\alpha)]^2 - (\alpha+1)\zeta_{n,k}(\alpha)} \end{aligned} \tag{14}$$

com

$$a_n(\alpha) = (\alpha+2)^2n^2 - \alpha(\alpha+2)n - (\alpha+1), \quad b_n(\alpha) = (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)$$

e

$$c_n(\alpha) = -(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3).$$

O leitor deve observar uma diferença óbvia sobre a monotonicidade das quantidades envolvendo $x_{n,k}^M(\alpha)$ e $x_{n,k}^N(\alpha)$. Não está clara a monotonicidade para essa última. Experimentos numéricos mostram que, curiosamente, todas as quantidades

$$N[x_{n,k}^N(\alpha) - \zeta_{n,k}(\alpha)], \quad k = 1, \ldots, n-2, n,$$

crescem com $N > 0$ enquanto $N[x_{n,n-1}^N(\alpha) - \zeta_{n,n-1}(\alpha)]$ decresce.

Referências

[1] D. K. Dimitrov, F. Marcellán, and F. R. Rafaeli, Monotonicity of zeros of Laguerre-Sobolev-Type orthogonal polynomials. Submetido.

[2] H. Dueñas, and F. Marcellán, Laguerre-type orthogonal polynomials. Electrostatic interpretation, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 38 (2007), 345-358.

[3] H. Dueñas, and F. Marcellán, The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials. Holonomic equation and electrostatic interpretation, *Rocky Mount. J. Math.*, In press.

[4] R. Koekoek, and H. G. Meijer, A generalization of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, 24 (1993), 768-782.