

Dois casos de emparelhamentos generalizados associados a tesselação $\{12g - 6, 3\}$

Mercio B. Faria*

Depto de Matemática, CCE, UFV
36570-000, Viçosa, MG
E-mail: mercio@ufv.br

Reginaldo Palazzo Jr

Depto de Telemática, FEEC, UNICAMP,
13083-852, Campinas, SP
E-mail: palazzo@dt.fee.unicamp.br

28 de maio de 2009

1 Resumo

O objetivo principal deste artigo é o estudo de emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos com $12g - 6$ arestas que estejam associados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$ pois estas fornecem empacotamentos de esferas com densidade máxima e portanto relacionados a códigos com probabilidade de erro mínima, ou seja, códigos ótimos. Neste artigo apresentamos as generalizações dos casos I e IV, figura 3, onde mostramos que todos os seus ciclos de vértices tem comprimento 3 e portanto são domínios fundamentais da tesselação $\{12g - 6, 3\}$.

Palavras-chave: *Emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos, Códigos geometricamente uniforme, Empacotamento de esferas, Geometria hiperbólica*

2 Introdução

O problema de empacotamento de esferas tem como principal objetivo a busca pela maior densidade possível de empacotamento. Dentre os possíveis empacotamentos de esferas, destacamos os associados a reticulados, ou seja, aos conjuntos de esferas cujos centros fornecem um reticulado. Nestes casos, temos que a densidade de empacotamento é o volume da esfera dividido pelo volume do polígono que a contém.

Assim, quando consideramos um reticulado da forma $\{p, q\}$, temos um empacotamento de esferas associado. A busca por empacotamentos reticulados ótimos, no sentido da maior densidade possível, está ligada à busca de códigos ótimos, pois maior densidade de empacotamento implica em menor probabilidade de erro.

Em [8, página 241], Toth apresentou o liminfante máximo para a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Segundo ele, a densidade de empacotamento é limitada superiormente por $\frac{3}{\pi}$. Em [2, Cáp. 4 teorema 4.1.1] fizemos estudos assintóticos para reticulados do tipo $\{p, q\}$. Demonstramos que assintoticamente¹, a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$. Porém, temos que $\frac{3}{\pi}$ é atingido por empacotamentos de horobolas $\{\infty, 3\}$.

A relevância de tais resultados para empacotamento de esferas, está no fato que um reticulado hiperbólico do tipo $\{12g - 6, 3\}$ fornece um empacotamento ótimo com relação a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Além disto, para $g \rightarrow \infty$ temos que as densidades,

*Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro, processo número 505258/2008-0, e à Universidade Federal de Viçosa pela licença para estágio pós-doutoral.

¹Assintoticidade no sentido de p e q tenderem a infinito, onde p e q determinam um ladrilhamento $\{p, q\}$.

de empacotamento e de cobertura, do referido reticulado atinge o valor máximo apresentado por Toth. Daí, nosso interesse em explorar os emparelhamentos de arestas de polígonos, em particular os polígonos com $12g - 6$ arestas (seção 3).

3 Emparelhamento de arestas de um polígono

Seja P um polígono e considere \mathcal{A} o conjunto de arestas de P . Um emparelhamento de arestas de P é definido da seguinte forma.

Definição 3.1. Um emparelhamento de arestas de P é um conjunto $\Phi = \{T_\tau | \tau \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$: 1) existe aresta $\tau' \in \mathcal{A}$ com $T_\tau(\tau') = \tau$; 2) as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$ satisfazem a relação $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$; 3) se τ for aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.

O emparelhamento Φ de um polígono P gera um grupo Γ . Com este grupo podemos obter superfícies de Riemann R de um dado gênero g através do quociente de \mathbb{E} por Γ , denotado por $\frac{\mathbb{E}}{\Gamma}$, onde \mathbb{E} pode ser o plano euclidiano, ou o plano elíptico, ou o plano hiperbólico. Se Γ é um grupo finitamente gerado do primeiro tipo², podemos denotar a assinatura de Γ por $(g : k; m_1, m_2, \dots, m_k)$, onde g denota o gênero, k o número de elementos elípticos e/ou parabólicos. Caso Γ não tenha elementos parabólicos nem elípticos, então denotamos por $(g : 0)$.

Seja Γ um grupo finitamente gerado do primeiro tipo Γ com assinatura $(g : 0)$. Então o número N de arestas de arestas do polígono emparelhadas pelas funções geradoras de Γ está entre $4g$ e $12g - 6$ [1].

Os emparelhamentos para polígonos com $4g$ arestas foram bem explorados na literatura [2], [4], [5], [7] e [10]. As figuras 1 e 2, ilustram dois destes emparelhamentos.

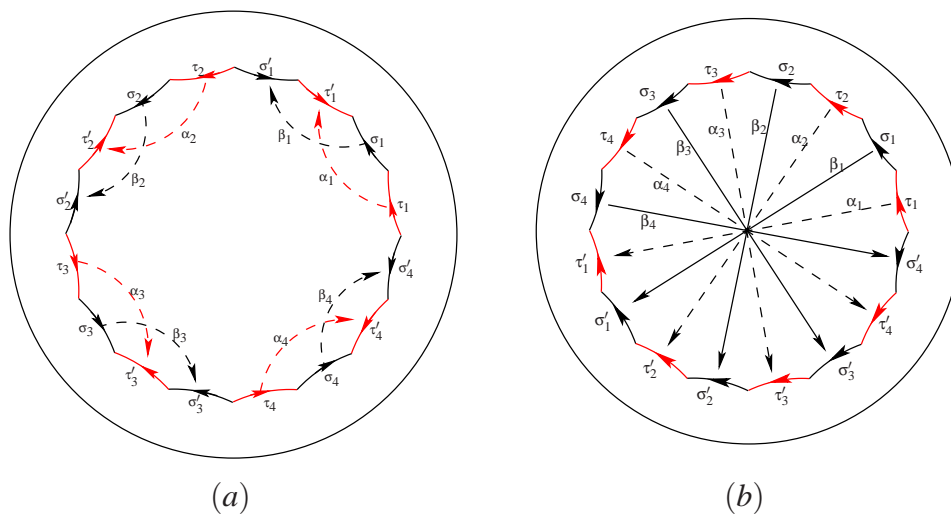


Figura 1: (a) Ilustração do emparelhamento para gênero $g = 4$

Figura 2: (b) Emparelhamento para $g = 4$ com arestas diametralmente opostas

Com relação aos emparelhamentos de arestas de polígonos com $12g - 6$ arestas que representam uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero g , para o caso do gênero ser dois ($g = 2$) sabemos que existem somente oito emparelhamentos e estes estão apresentados na página 267 em [5] (veja figura 3) (salvo conjugações por isometrias preservando orientação). Para os gêneros 3, 4 e 5 o número possível de emparelhamentos tem 5, 7 e 10 dígitos respectivamente,

²Dizemos que um grupo Γ é do primeiro tipo se o conjunto dos pontos de acumulação das órbitas $\Gamma(z)_{z \in \mathbb{D}^2}$ é igual à fronteira do disco de Poincaré $\partial\mathbb{D}^2$.

conforme observou Gironde e González-Diez em [6]. Em minha tese de doutorado, [3], um desses emparelhamentos foi generalizado para qualquer gênero g .

Neste texto apresentamos a generalização de mais dois casos (Caso I e caso IV). Iniciamos com a generalização do caso I.

4 Emparelhamento generalizado Φ_{12g-6}^I

Considere um polígono $P_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$ com $12g-6$ arestas, $g \geq 2$, onde \mathbb{D}^2 representa o plano hiperbólico. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por $\{v_1, v_2, \dots, v_{12g-6}\}$ e suas arestas por $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12g-6}\}$ onde τ_i é o segmento geodésico iniciando em v_i e findando em v_{i+1} , $i \bmod (12g-6)$. Denotando os vértices inicial e final de uma aresta τ por $I(\tau)$ e $F(\tau)$, temos pela construção do polígono que $I(\tau_i) = v_i$ e $F(\tau_i) = v_{i+1}$.

Se o gênero g for igual a 2 temos um polígono com 18 arestas, P_{18} . O caso I apresentado em [5] fornece um emparelhamento que representa uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero 2 e é dado pelos pares de arestas, emparelhadas da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{l} \{\tau_1, \tau_{10}\}, \{\tau_2, \tau_5\}, \{\tau_3, \tau_7\}, \{\tau_4, \tau_8\}, \{\tau_6, \tau_9\} \\ \{\tau_{11}, \tau_{14}\}, \{\tau_{15}, \tau_{18}\}, \{\tau_{12}, \tau_{16}\}, \{\tau_{13}, \tau_{17}\} \end{array} \right]. \quad (1)$$

Nesta seção, exibimos a generalização do emparelhamento correspondente ao caso I que é descrita por.

- Dado o polígono P_{12g-6} descrito acima, assumimos, para permitir emparelhamento de arestas por isometrias, que os seguintes pares de arestas possuem o mesmo comprimento:

$$\begin{aligned} & \{\tau_1, \tau_{10}\}; \{\tau_2, \tau_5\}; \{\tau_6, \tau_9\}; \{\tau_3, \tau_7\}; \{\tau_4, \tau_8\}; \\ & \{\tau_{11+10k}, \tau_{14+10k}\}; \{\tau_{15+10k}, \tau_{12g-6-2k}\}; \{\tau_{16+10k}, \tau_{19+10k}\}; \{\tau_{20+10k}, \tau_{12g-7-2k}\}; \\ & \{\tau_{12+10k}, \tau_{17+10k}\}; \{\tau_{13+10k}, \tau_{18+10k}\}; \quad \text{se } 0 \leq k \leq g-3. \\ & \{\tau_{10g-9}, \tau_{10g-6}\}; \{\tau_{10g-5}, \tau_{10g-2}\}; \{\tau_{10g-8}, \tau_{10g-4}\}; \{\tau_{10g-7}, \tau_{10g-3}\} \end{aligned}$$

Considere as isometrias hiperbólicas (únicas) que indentificam os pares conforme segue:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\tau_1) &= \tau_{10}; \quad \alpha_2(\tau_2) = \tau_5; \quad \alpha_3(\tau_6) = \tau_9; \\ \alpha_4(\tau_3) &= \tau_7; \quad \alpha_5(\tau_4) = \tau_8; \\ \beta_{1+6k}(\tau_{11+10k}) &= \tau_{14+10k}; \quad \beta_{2+6k}(\tau_{15+10k}) = \tau_{12g-6-2k}; \quad \beta_{3+6k}(\tau_{16+10k}) = \tau_{19+10k}; \\ \beta_{4+6k}(\tau_{20+10k}) &= \tau_{12g-7-2k}; \quad \beta_{5+6k}(\tau_{12+10k}) = \tau_{17+10k}; \quad \beta_{6+6k}(\tau_{13+10k}) = \tau_{18+10k}; \\ \alpha_6(\tau_{10g-9}) &= \tau_{10g-6}; \quad \alpha_7(\tau_{10g-5}) = \tau_{10g-2}; \quad \alpha_8(\tau_{10g-8}) = \tau_{10g-4}; \quad \alpha_9(\tau_{10g-7}) = \tau_{10g-3} \\ & \text{se } 0 \leq k \leq g-3. \end{aligned}$$

Dizemos que o conjunto

$$\Phi_{12g-6}^I = \{\alpha_j, \beta_{1+6k}, \beta_{2+6k}, \beta_{3+6k}, \beta_{4+6k}, \beta_{5+6k}, \beta_{6+6k}; k = 0, 1, 2, \dots, g-3 \quad e \quad j = 1, 2, \dots, 9\}$$

é um emparelhamento para o polígono P_{12g-6} . Particularmente, se tomarmos $g = 2$ teremos o emparelhamento apresentado em (1).

4.1 O emparelhamento Φ_{12g-6}^I

Esta parte, contém alguns resultados que nos permitem conhecer um pouco mais sobre o emparelhamento Φ_{12g-6}^I . Neste sentido, iniciamos apresentando um resultado que diz que todo ciclo³ de vértices tem comprimento três. Antes, seja $\varphi \in \Phi_{12g-6}^I$ e suponha que $\varphi(\tau_i) = \tau_j$. Então temos que φ satisfaz

³Seja $\Gamma_{12g-6} = \langle \Phi_{12g-6} \rangle$. Um *ciclo* é uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, é um conjunto da forma

$$\{T(z) | T \in \Gamma_{12g-6} \text{ e } z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } P_{12g-6}\}.$$

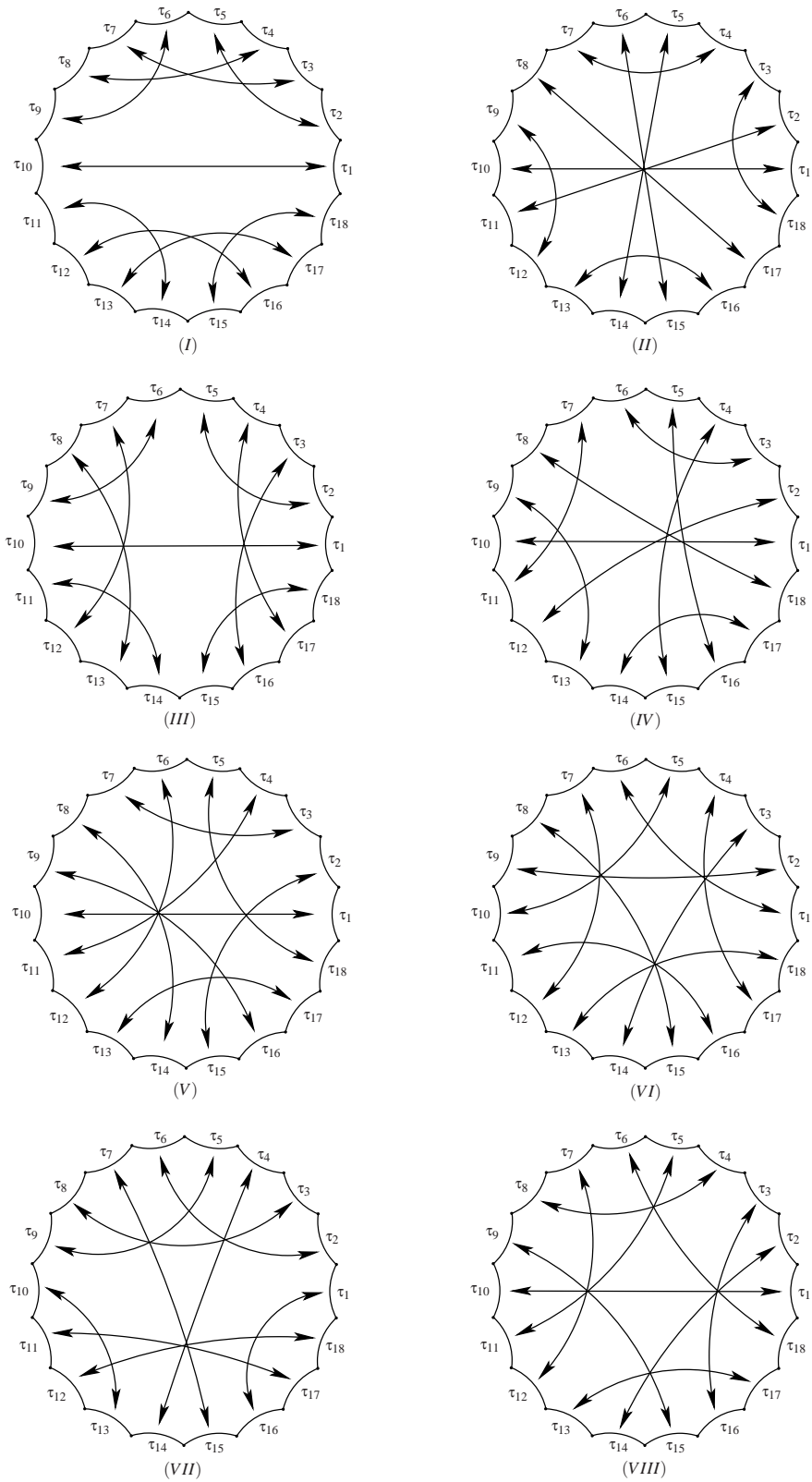


Figura 3: Os oito tipos de emparelhamento, de polígonos com 18 arestas, existentes para gênero $g = 2$. Figura reproduzida da página 267 em [5].

$$\varphi(I(\tau_i)) = F(\varphi(\tau_i)) = F(\tau_j) \quad e \quad \varphi(F(\tau_i)) = I(\varphi(\tau_i)) = I(\tau_j).$$

Em outras palavras, como $I(\tau_l) = v_l$ e $F(\tau_l) = v_{l+1}$, obtemos que, nesta situação $\varphi(v_i) = v_{j+1}$ e $\varphi(v_{i+1}) = v_j$.

Proposição 4.1. *Seja Φ_{12g-6}^I um emparelhamento do polígono P_{12g-6} . Então todos os ciclos de vértices tem comprimento 3 conforme verificamos a seguir:*

$$\begin{aligned} & \{v_2, v_6, v_{10}\}; \{v_3, v_5, v_8\}; \{v_4, v_7, v_9\}; \\ & \{v_{11+5k}, v_{15+5k}, v_{1-k}\}; \quad k = 0, 1, \dots, 2g-5 \\ & \{v_{12+10k}, v_{14+10k}, v_{18+10k}\}; \{v_{13+10k}, v_{17+10k}, v_{19+10k}\}; \quad k = 0, 1, \dots, g-3 \\ & \{v_{10g-9}, v_{10g-5}, v_{-2g+5}\}; \{v_{10g-8}, v_{10g-6}, v_{10g-3}\}; \{v_{10g-7}, v_{10g-4}, v_{10g-2}\} \end{aligned}$$

Demonstração: Iniciamos obtendo o ciclo que contém o vértice v_2 . Note que

$$v_2 = F(\tau_1) = I(\tau_2).$$

Pela definição das funções de emparelhamento, temos que τ_2 é emparelhada à aresta τ_5 através da transformação α_2 . Segue então que

$$\alpha_2(v_2) = \alpha_2(I(\tau_2)) = F(\alpha_2(\tau_2)) = F(\tau_5) = v_6,$$

de modo que v_6 pertence ao ciclo determinado por v_2 . Mas, além de ser o vértice final de τ_5 , temos que v_6 é o vértice inicial de τ_6 e como τ_6 é emparelhado a τ_9 por α_3 , obtemos

$$\alpha_3(v_6) = \alpha_3(I(\tau_6)) = F(\alpha_3(\tau_6)) = F(\tau_9) = v_{10},$$

de modo que v_{10} pertence ao ciclo determinado por v_2 e v_6 . Novamente, temos que $v_{10} = I(\tau_{10})$ e τ_{10} é emparelhada a τ_2 através da isometria α_1^{-1} . Segue que

$$\alpha_1^{-1}(v_{10}) = \alpha_1^{-1}(I(\tau_{10})) = F(\alpha_1^{-1}(\tau_{10})) = F(\tau_1) = v_2,$$

completando um ciclo. Assim, o ciclo determinado por v_2 é

$$\{v_2, v_6, v_{10}\}. \quad (2)$$

Seguindo neste raciocínio, temos todos os outros $4g-3$ ciclos restantes. ■

Seja Γ_{12g-6}^I o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^I do polígono P_{12g-6} . A partir da proposição 4.1 concluímos que o número de ciclos de vértices são $4g-2$ ($((12g-6)/3)$).

Assim, temos condições de concluir que o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^I nos fornece através do quociente pelo plano hiperbólico, uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g .

Corolário 4.2. *Se a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π , então Γ_{12g-6}^I é um grupo propriamente descontínuo, isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(R_g)$, e $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}^I$ é difeomorfo à superfície de Riemann R_g .*

Demonstração: Assumindo que a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π e sendo as arestas emparelhadas de mesmo comprimento concluímos, pelo teorema de Poincaré, que Γ_{12g-6}^I é discreto. Como $\Gamma_{12g-6}^I \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ temos um grupo propriamente descontínuo⁴. Além disto, pelo teorema de Poincaré, segue que o polígono é domínio fundamental do grupo gerado pelas funções de emparelhamento, de modo que o quociente $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}^I$ é difeomorfo a uma superfície de Riemann, R_g , compacta orientável de gênero g e $\pi_1(R_g)$ é isomorfo a Γ_{12g-6}^I . ■

Resta apenas determinar seu gênero, que pode ser obtido através da característica de Euler-Poincaré. Da proposição 4.1 temos que o número de ciclos de vértices são $4g-2$. Sendo $6g-3$ o número de arestas identificadas, concluímos que o emparelhamento Φ_{12g-6}^I representa uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g pois a característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi(P_{12g-6}) = 1 - (6g-3) + (4g-2) = 2 - 2g.$$

Damos sequência ao artigo apresentando o caso IV.

⁴Um subgrupo $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ é discreto se e somente se sua ação em \mathbb{H}^2 for propriamente descontínua (Capítulo 5 das notas de aula de "Grupos Fuchsianos" do professor Marcelo Firer).

5 Emparelhamento generalizado Φ_{12g-6}^{IV}

Considere um polígono $P_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$ com $12g - 6$ arestas, $g \geq 2$.

Se o gênero g for igual a 2 temos um polígono com 18 arestas, P_{18} . O caso IV apresentado em [5] também fornece um emparelhamento que representa uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero 2 e é dado pelos pares de arestas, emparelhadas da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{l} \{\tau_1, \tau_{10}\}, \{\tau_2, \tau_{12}\}, \{\tau_3, \tau_6\}, \{\tau_4, \tau_{15}\}, \{\tau_5, \tau_{16}\} \\ \{\tau_7, \tau_{11}\}, \{\tau_8, \tau_{18}\}, \{\tau_9, \tau_{13}\}, \{\tau_{14}, \tau_{17}\} \end{array} \right]. \quad (3)$$

Prosseguimos descrevendo a generalização do emparelhamento correspondente ao caso IV.

- Dado o polígono P_{12g-6} descrito acima, assumimos, para permitir emparelhamento de arestas por isometrias, que os seguintes pares de arestas possuem o mesmo comprimento:

$$\begin{aligned} & \{\tau_3, \tau_6\}; \{\tau_4, \tau_{8g-1}\}; \{\tau_5, \tau_{8g}\}; \\ & \{\tau_{7+8k}, \tau_{11+8k}\}; \{\tau_{8+8k}, \tau_{12g-6-4k}\}; \{\tau_{9+8k}, \tau_{13+8k}\}; \\ & \{\tau_{10+8k}, \tau_{1-4k}\}; \{\tau_{12+8k}, \tau_{2-4k}\}; \{\tau_{14+8k}, \tau_{12g-7-4k}\} \\ & \text{se } 0 \leq k \leq g-2. \end{aligned}$$

Considere as isometrias hiperbólicas (únicas) que indentificam os pares conforme segue:

$$\begin{aligned} \delta_1(\tau_3) &= \tau_6; \delta_2(\tau_4) = \tau_{8g-1}; \delta_3(\tau_5) = \tau_{8g}; \\ \xi_{1+6k}(\tau_{7+8k}) &= \tau_{11+8k}; \xi_{2+6k}(\tau_{8+8k}) = \tau_{12g-6-4k}; \xi_{3+6k}(\tau_{9+8k}) = \tau_{13+8k}; \\ \xi_{4+6k}(\tau_{10+8k}) &= \tau_{1-4k}; \xi_{5+6k}(\tau_{12+8k}) = \tau_{2-4k}; \xi_{6+6k}(\tau_{14+8k}) = \tau_{12g-7-4k}; \\ & \text{se } 0 \leq k \leq g-2. \end{aligned}$$

Dizemos que o conjunto

$$\Phi_{12g-6}^{IV} = \{\delta_j, \xi_{1+6k}, \xi_{2+6k}, \xi_{3+6k}, \xi_{4+6k}, \xi_{5+6k}, \xi_{6+6k}; k = 0, 1, 2, \dots, g-2 \text{ e } j = 1, 2, 3\}$$

é um emparelhamento para o polígono P_{12g-6} . Particularmente, se tomarmos $g = 2$ teremos o emparelhamento apresentado em (3).

Um relevante resultado sobre o emparelhamento Φ_{12g-6}^{IV} é que

Proposição 5.1. *Seja Φ_{12g-6}^{IV} um emparelhamento do polígono P_{12g-6} . Então todos os ciclos de vértices tem comprimento 3 e são da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} & \{v_4, v_6, v_{8g}\}; \{v_5, v_{8g-1}, v_{8g+1}\}; \\ & \{v_{7+8k}, v_{12+8k}, v_{3-4k}\}; \{v_{8+8k}, v_{11+8k}, v_{1-4k}\}; \{v_{9+8k}, v_{14+8k}, v_{12g-6-4k}\}; \\ & \{v_{10+8k}, v_{13+8k}, v_{2-4k}\}; \quad k = 0, 1, \dots, g-2 \end{aligned}$$

Demonstração: Análoga à construção feita na demonstração da proposição 4.1. ■

Seja Γ_{12g-6}^{IV} o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^{IV} do polígono P_{12g-6} . A partir da proposição 4.1 concluímos que o número de ciclos de vértices são $4g - 2$ ($(12g - 6)/3$).

Assim, temos condições de concluir que o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^{IV} nos fornece através do quociente pelo plano hiperbólico, uma superfície de Riemann de gênero g .

Corolário 5.2. *Se a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π , então Γ_{12g-6}^{IV} é grupo propriamente descontínuo, isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(R_g)$, e $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}^{IV}$ é difeomorfo à superfície de Riemann R_g .*

Demonstração: Análoga à demonstração do corolário 4.2. ■

Resta apenas determinar seu gênero, que pode ser obtido através da característica de Euler-Poincaré. Da proposição 5.1 temos que o número de ciclos de vértices são $4g - 2$. Sendo $6g - 3$ o número de arestas identificadas, concluímos que o emparelhamento Φ_{12g-6}^{IV} representa uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g pois a característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi(P_{12g-6}) = 1 - (6g - 3) + (4g - 2) = 2 - 2g.$$

6 Conclusão

Os emparelhamentos generalizados que apresentamos neste trabalho estão associados a polígonos que são domínios fundamentais de tesselações do tipo $\{12g - 6, 3\}$ e estas são as tesselações que forçam empacotamentos de esferas de densidade máxima, ou seja, empacotamentos ótimos. Além disto, acreditamos que busca por novos emparelhamentos relacionados a esta tesselação nos auxiliará também a encontrarmos grupos os fuchsianos aritméticos relacionados a $\{12g - 6, 3\}$ (veja [9]).

Referências

- [1] Beardon, Alan - *The Geometry of Discrete Groups*, - Springer Verlag, 1983.
- [2] Faria, Mercio Botelho. *Empacotamento de esferas em espaços hiperbólicos*, Dissertação de mestrado, Imecc-Unicamp, 2001.
- [3] Faria, Mercio Botelho. *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*. Tese de doutorado - Imecc/Unicamp, 2005.
- [4] Firby, P. A & Gardiner, C.F. *Surface topology*, Ellis Horwood Limited, New York, 1991.
- [5] Fricke, Robert & Klein, Felix. *Vorlesugen über die theorie der automorphen funktionen*, Teubener, Leipzig, 1897.
- [6] Girono, Ernesto & González-Diez, Gabino. *Genus two extremal surfaces: extremal discs, isometries and weierstrass points*, Israel journal of mathematics 132, 221 – 238, 2002.
- [7] Kinsey, L. Christine. *Topology of surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [8] Tóth, L. Fejes. *Regular Figures*. International series of monographs on Pure and Applied Mathematics, Pergamon press LTDA, Oxford, vol. 48, 1964.
- [9] Vieira, Vandenberg L. *Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais*. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, 2007.
- [10] Weeks, Jeffrey R. *The shape of space*, Marcel Dekker, New York, 1985.