

Estudo da Dispersão de Poluentes com Parâmetros Fuzzy

Elaine Cristina Catapani Poletti,

FEEC/CESET, UNICAMP,

13484-332, Limeira, SP

E-mail: elainec@ceset.unicamp.br

João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP

13083-970, Campinas, SP

E-mail: joni@ime.unicamp.br

Resumo: Neste trabalho é apresentado um problema de poluição em um sistema de reservatório. Para tanto é proposto um modelo matemático bidimensional, baseado na equação diferencial parcial de Difusão-Advecção, no sentido de descrever a dispersão de poluente de superfície neste tipo de recurso hídrico, em função dos fenômenos físicos considerados. Para o estudo são utilizados métodos de aproximação numérica para as simulações, onde foram considerados parâmetros fuzzy permitindo incorporar ao modelo, clássico, aspectos de intrínsecos de subjetividade e incerteza.

Palavras-chave: Dispersão de Poluentes, Teoria dos Conjuntos Fuzzy, Aproximação Numérica, Simulação Computacional.

1 Introdução.

O funcionamento de sistemas aquáticos tem sido objeto de diversas pesquisas, tanto quanto às condições naturais quanto em relação aos impactos neles causados pelas atividades antrópicas ou quanto às atividades de exploração do recurso [9], [6].

Como num ciclo, a qualidade e quantidade de água são bases para o desenvolvimento econômico, que volta a contribuir para a qualidade da água e quantidade também, usualmente com efeitos negativos predominantes, pois uma parcela significativa dos poluentes liberados acaba sendo sendo transportada para a água e acumulados em lagos, reservatórios, mares e rios [8].

Assim, este estudo foi realizado no reservatório de Salto Grande, integrante da sub-bacia do rio Atibaia, abrigada pela bacia do rio Piracicaba, uma importante região do Estado de São Paulo, formado principalmente pelo represamento do rio Atibaia, sua principal fonte de sedimento.

O grande aporte de nutrientes, transportados pelo rio Atibaia, bem como a quantidade de efluentes domésticos e industriais sem tratamento, provenientes das cidades da região, auxiliam o florescimento de algas que produzem toxinas e odor, e as fontes de poluição difusa tais como áreas de agricultura local podem lançar substâncias potencialmente poluidoras [4].

Considerando-se que o controle da poluição pode favorecer ações de conservação e/ou preservação do meio ambiente e que a modelagem matemática pode ser uma aliada, contribuindo com cenários simulados à partir de condições reais e/ou hipotéticas e propiciando avaliações e estudos comparativos de estratégias é que se propõe este estudo, que envolve modelagem matemática no estudo da dispersão de poluentes na superfície da água, em um sistema de represamento, onde características intrínsecas são incorporadas ao modelo através da teoria dos conjuntos fuzzy.

2 O Modelo Matemático.

O modelo matemático utilizado baseia-se na Equação de Difusão Advecção que considera o fenômeno da difusão efetiva, o transporte advectivo, o decaimento e possíveis fontes de poluição.

Considerando-se a concentração do poluente como a quantidade de matéria existente em um determinado ponto do plano (x, y) no instante (t) é denotada por $c = c(x, y; t)$, com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, T]$.

A variação dessa concentração em um elemento de área em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dada matematicamente pela equação:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}[\alpha \nabla c] - \text{div}[\vec{V}c] - \sigma c + f, \quad (1)$$

$(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in (0, T] \subset \mathbb{R}$

onde:

1. A difusão é descrita através do termo $\text{div}[\alpha \nabla c]$, onde α é tida por uma constante que indica a difusibilidade efetiva no meio [7];
2. O transporte advectivo é modelado por $\text{div}[\vec{V}c]$, com \vec{V} indicando o campo de velocidade de transporte no meio, $\text{div}[\vec{V}] = 0$ [5];
3. O decaimento dado por $\sigma(x, y; t)c(x, y; t)$, com σ indicando a taxa de decaimento global na água [2]; e
4. A fonte dada por $f = f(x, y; t)$, indicando descargas de efluentes.

Nesta abordagem será considerada a fonte como pontual, retratando o ingresso de poluente no reservatório pelo rio Atibaia. Como forma de condições de contorno, tem-se von Neumann homogêneas e condição inicial $c(x, y; 0) = c_0(x, y)$, para $(x, y) \in \Omega$.

3 Formulação Variacional e Discretização.

O objetivo com a formulação variacional é "enfraquecer" as condições de regularidade da solução, o que proporciona um aumento de classe de funções possíveis para a solução do problema.

Desta forma, considerando o espaço abaixo, necessário para a formulação variacional genérica, para uma separação de variáveis espaciais e temporal:

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in L^2 [J, H^1(\Omega)], \text{ com } \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega), \forall t \in J \right\}.$$

com $J=(0, T]$ e os produtos internos dados por:

$$\langle u|v \rangle_{0, \Gamma} = \int_{\partial \Omega} u(x, y).v(x, y)d\gamma; \text{ e } (\nabla u | \nabla v)_{0, \Omega} = \int \int_{\Omega} \nabla u. \nabla v d\mu.$$

e usando estes produtos internos apropriadamente, temos a formulação fraca dada por:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} | v \right)_{\Omega} + \alpha (\nabla c | \nabla v)_{\Omega} + V_1 \left(\frac{\partial c}{\partial x} | v \right)_{\Omega} + \sigma (c|v)_{\Omega} = (f|v)_{\Omega}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2)$$

Como pode ser observado na equação (1) aparecem as derivadas de segunda ordem, o sentido clássico, já na formulação fraca aparecem apenas as derivadas de primeira ordem, no sentido das distribuições.

Para a discretização da equação (2) a escolha foi pelo Método de Elementos Finitos, via método de Garlekin, para a discretização espacial e Crank-Nicolson para a discretização temporal.

Deste modo, obtêm-se aproximações para a solução em variáveis separadas,

$$c(x, y; t) = \sum_j c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y),$$

onde o sub-índice j refere-se à discretização do domínio considerado e $\{\varphi_j\}$ é uma base para o subespaço $V_h \subset H^1(\Omega)$ de dimensão $N < \infty$.

As funções da base de V_h são escolhidas do tipo linear por partes, satisfazendo:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

onde (x_j, y_j) são as coordenadas do j -ésimo nó da malha.

Assim, $\forall \varphi_i \in$ base de V_h , tem-se:

$$\sum_j c_j \left[\alpha (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_\Omega + V_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right)_\Omega + \sigma (\varphi_j | \varphi_i)_\Omega \right] + \sum_j \frac{\partial c_j}{\partial t} (\varphi_j | \varphi_i)_\Omega = (f | \varphi_i)_\Omega. \quad (4)$$

E daí, fazendo a discretização da variável temporal, tem-se, $\forall \varphi_i \in$ base de V_h :

$$\sum_j c_j^{n+1} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i)_\Omega + \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_\Omega + \frac{V_1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right)_\Omega + \frac{\sigma}{2} (\varphi_j | \varphi_i)_\Omega \right\} = \sum_j c_j^n \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i)_\Omega - \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_\Omega - \frac{V_1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right)_\Omega - \frac{\sigma}{2} (\varphi_j | \varphi_i)_\Omega \right\} + \left(f^{n+\frac{1}{2}} | \varphi_i \right)_\Omega. \quad (5)$$

A ordem das aproximações temporais, é localmente, $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

4 Resultados e Discussão.

Para as simulações, tendo em vista a dificuldade em se precisar os parâmetros de modo que ca-racterísticas intrínsecas fossem consideradas, a opção foi pela modelagem dos coeficientes através da teoria dos conjuntos fuzzy [1].

Desta forma, utilizando-se de sistemas de base de regras, os coeficientes da difusão, transporte e decaimento foram modelados.

Um sistema de base de regras possui quatro componentes: um processador de entrada, um conjunto de regras liguísticas, um método de inferência e um processador de saída.

Nesta abordagem foram propostos três controladores: um para a modelagem do coeficiente de transporte, V_1 , dependente do vento, \mathbf{v} ; outro para a modelagem do coeficiente de decaimento, σ , dependente do tipo de ambiente, \mathbf{A} , e da quantidade de matéria, \mathbf{Qm} ; e, finalmente, o terceiro controlador responsável pela modelagem do coeficiente da difusão, α , dependente do transporte e do decaimento do poluente, conforme é apresentado a seguir.

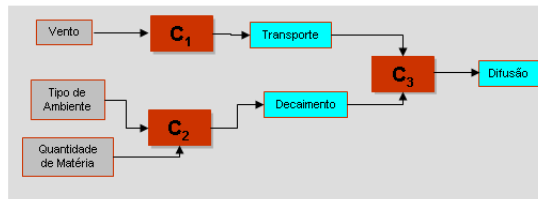


Figura 1: Estrutura do sistema de base de regras.

Para cada variável foram atribuídos termos linguísticos:

V_1 foi caracterizado por: $\{pequeno, médio, grande e muito grande\}$;

\mathbf{v} por: $\{fraco, moderado, forte e muito forte\}$;

σ por: $\{alto, médio alto, médio, médio baixo e baixo\}$; \mathbf{Qm} por: $\{pouca, mediana e muita\}$;

\mathbf{A} por: $\{favorável, mediano e desfavorável\}$ e, finalmente,

α por: $\{baixo, médio baixo, médio, médio alto e alto\}$.

Além disso, as variáveis foram modeladas matematicamente por conjuntos fuzzy representados por funções de pertinências.

Nesta modelagem as funções de pertinência foram modeladas por meio de funções triangulares e trapezoidais.

Como método de inferência, utilizou-se o Método de Mamdani.

As saídas dos controladores foram obtidas através do método de defuzzificação Centro de Gravidade, obtendo-se como resposta as figuras dadas por:

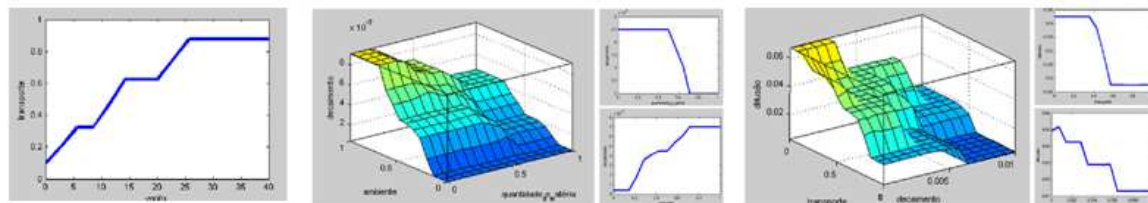


Figura 2: Relação entre as variáveis de entrada e de saída dos controladores.

Nas simulações realizadas, procuramos observar a dispersão do poluente de superfície no reservatório levando-se em consideração uma fonte pontual e uma quantidade inicial de poluente no reservatório $c_0 = 0.5$ quantidade de poluente por unidade de área e $f = 0.0875$, localizada no segundo nó da malha, na fronteira Γ_1 , representando o ingresso de poluente pelo rio Atibaia.

Os coeficientes utilizados para as simulações foram: vento moderado de $\mathbf{v}=5,4\text{km/h}$, quantidade de material poluente como $\mathbf{Qm}=\{0, 2; 0, 6; 0, 75\}$ caracterizado por pouco material, uma quantidade mediana e muito material impactante.

Como condições do ambiente tomou-se $\mathbf{A}=\{0, 25; 0, 6; 0, 87\}$, sendo ambiente desfavorável, mediano e favorável aos processos de degradação, sendo possível, deste modo, explorar os coeficientes modelados por meio das regras fuzzy.

Para a geração dos cenários, considerou-se um período de 5 dias e um passo no tempo $\Delta t = 0.05$.

Uma das possibilidades de aproximação de Método de Galerkin é via Elementos Finitos, para tanto é necessário: (1) criar uma malha em Ω , e, para isto, neste trabalho optamos por elementos finitos triangulares e (2) definir a ordem dos polinômios de aproximação sobre cada triângulo, e, neste trabalho, os elementos finitos são lineares [3].

Para a geração da malha de elementos finitos do domínio foi utilizado o programa Gmsh, vale comentar que à medida que a malha é refinada, melhor é a aproximação do domínio.

Desta forma, variando-se os valores das variáveis de entrada dos controladores conforme explicitado acima, foram obtidos os seguintes cenários:

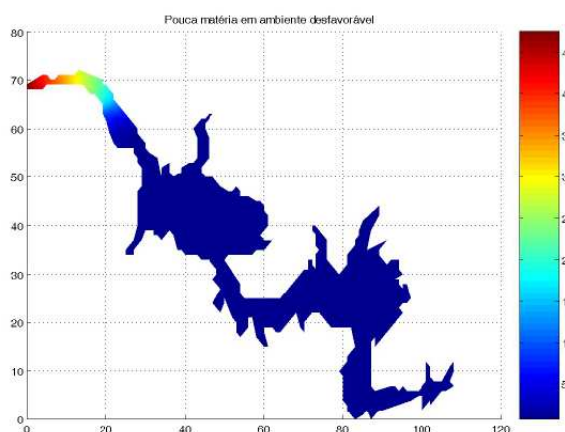


Figura 3: Cenário 1. Pouco material impactante em ambiente desfavorável.

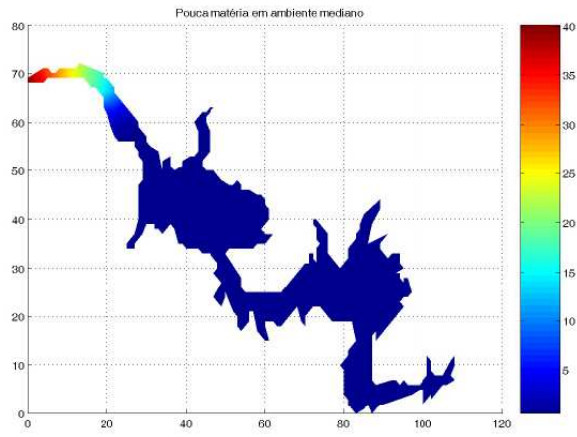


Figura 4: Cenário 2. Pouco material impactante em ambiente mediano.

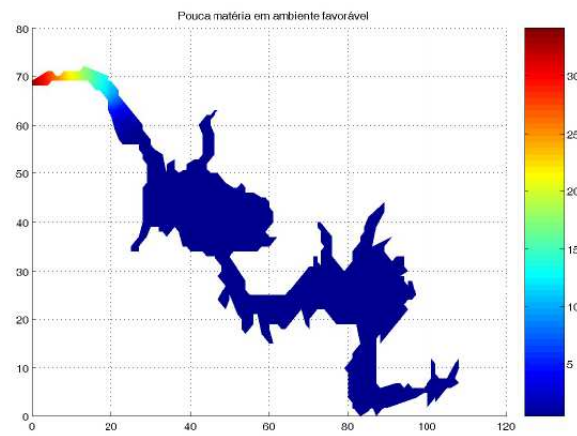


Figura 5: Cenário 3. Pouco material impactante em ambiente favorável.

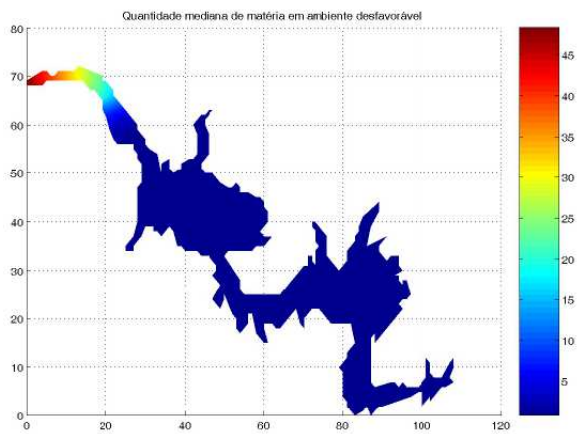


Figura 6: Cenário 4. Quantidade mediana de material impactante em ambiente desfavorável.

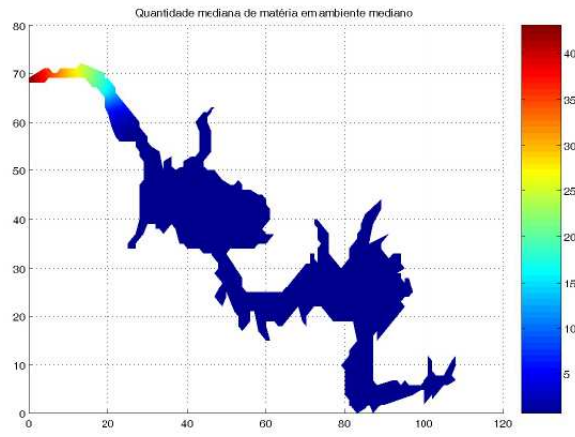


Figura 7: Cenário 5. Quantidade mediana de material impactante em ambiente mediano.

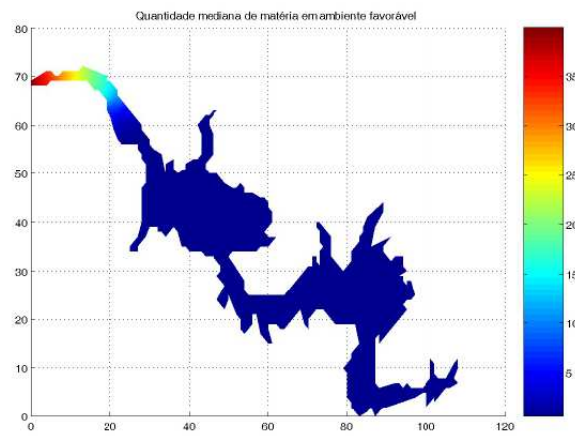


Figura 8: Cenário 6. Quantidade mediana de material impactante em ambiente favorável.

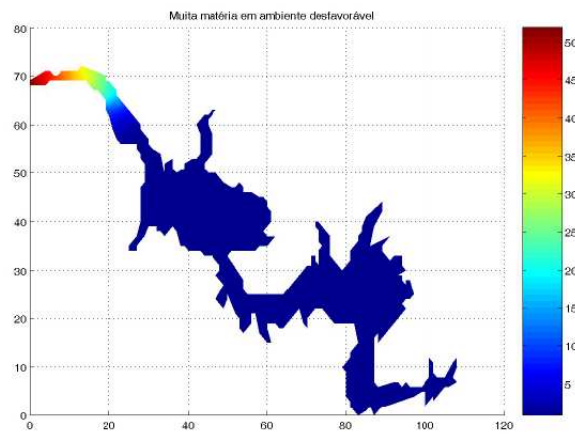


Figura 9: Cenário 7. Muita matéria em ambiente desfavorável.

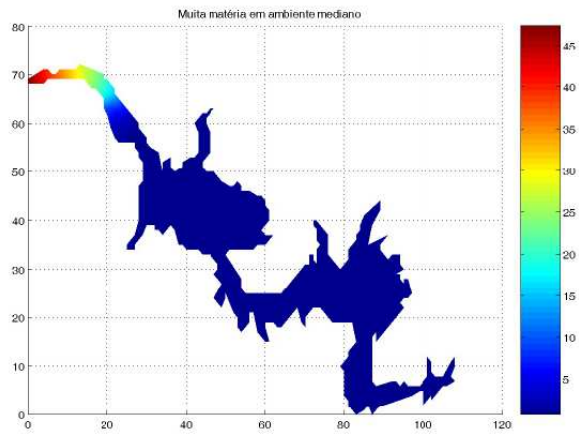


Figura 10: Cenário 8. Muita matéria em ambiente mediano.

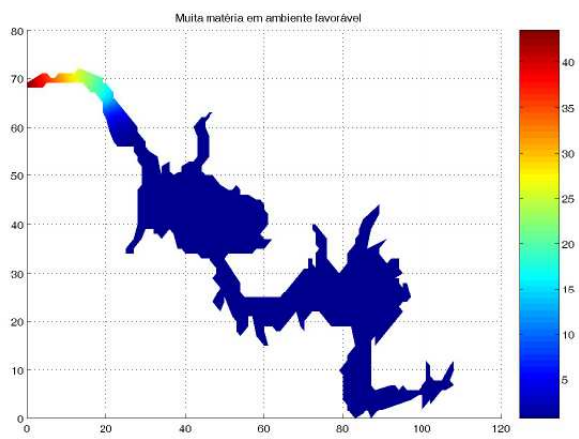


Figura 11: Cenário 9. Muita matéria em ambiente favorável.

De acordo com os cenários apresentados, pode-se verificar a influência do tipo de ambiente, propício, ou não, aos processos de degradação, bem como da quantidade de material impactante no meio.

Verifica-se que o aumento da quantidade de matéria poluidora no reservatório, reflete, juntamente com as características do meio ambiente, na concentração de poluente existente no reservatório, bem como sua taxa de variação por unidade de área, no tempo.

Nos cenários 1, 2 e 3, observamos o comportamento da concentração de poluente, cuja modelagem se deu com pouco material poluente, em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

Nos cenários 4, 5 e 6, observamos o comportamento da concentração de poluente, considerando-se uma quantidade mediana de material poluente, em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

Já, os cenários 7, 8 e 9, apresenta o comportamento da concentração de poluente, considerando-se muito material poluente, em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

Nestes cenários, constatamos que, em condições desfavoráveis aos processos de degradação, maiores são as concentrações de poluentes no meio, e, à medida que essas condições vão melhorando, menores vão ficando as concentrações finais do poluente.

Também, podemos observar que, conforme aumenta a quantidade de poluente no meio, independente das características do ambiente em termos de potencial de autodepuração, pior o estado final em termos de concentração de poluente no reservatório.

Considerando-se que esses resultados se mostraram satisfatórios, de acordo com especialistas, afirmamos que a grande contribuição se deu por conta da modelagem dos coeficientes da equação por meio de sistemas de base de regras fuzzy, onde características físicas do ambiente que puderam ser incorporadas, buscando retratar aspectos revelantes.

Referências

- [1] L. C. Barros and R. C. Bassanezi, "Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática", Coleção Imecc, Textos Didáticos, Vol. 5, Campinas - SP: UNICAMP/IMECC, 2006.
- [2] R. C. Bassanezi, "Ensino e aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia", Contexto: São Paulo, 2002.
- [3] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] E. L. G. Espíndola, M. A. Leite and C. B. Dornfeld, "Reservatório de Salto Grande [Americana, SP]: Caracterização, Impactos e Propostas de Manejo", RiMa, São Carlos, 2004.
- [5] L. Edelstein-Keshet, "Mathematical models in Biology", Random-House, N. York, 1988.
- [6] J. F. C. A. Meyer and G. L. Diniz, Pollutant dispersion in wetland systems: Mathematical modelling and numerical simulation, *Ecological Modelling*, 200 (2007) 360-370.
- [7] A. Okubo, "Diffusion and ecological problems: Mathematical models", Springer, Berlin, 1980.
- [8] G. M. Pala-Silva, "Relações dos indicadores microbiológicos com outros parâmetros limnológicos no Rio Corumbataí, SP, no intuito de propor um modelo matemático para gestão ambiental", Tese de Doutorado, Instituto de Biociências, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 2006. type=,
- [9] J. G. Tundisi, Novas Perspectivas para Gestão de Recursos Hídricos, *Revista USP*, 70 (2006) 24-35.