

Influência da Aproximação do Termo Fonte Singular de uma Equação de Difusão 1D na Ordem de Aproximação do Esquema Numérico de Solução

Flávia C. Miranda, **Aristeu da Silveira Neto,**

Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU,

E-mail: fcmiranda@mecanica.ufu.br, aristeus@mecanica.ufu.br,

Santos A. Enriquez-Remigio

Faculdade de Matemática-UFU

Campus Santa Mônica

38400-902, Uberlândia, MG

E-mail: santos@famat.ufu.br.

Resumo: *No presente trabalho estuda-se a influência da função de distribuição na ordem da aproximação do método de solução numérico usado para resolver a equação de difusão com termo fonte singular unidimensional sujeita a condições de contorno periódicas. Tal equação é uma versão bem simplificada das equações que aparecem no Método da Fronteira Imersa (MFI), que modela a presença do corpo através de um campo de força e a distribui nas células da solução numérica. Neste trabalho, foram empregadas três diferentes funções de distribuição e três métodos de discretização no espaço, reportados na literatura para a solução das equações do MFI sujeita às condições de contorno periódicas: método de diferenças finitas, método de diferenças finitas com transformada de Fourier discreta e método Pseudo-espectral de Fourier. A discretização no tempo é baseada no método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados mostram: (1) o mínimo erro foi obtido quando usou-se uma distribuição linear; (2) os métodos diferenças finitas e métodos de diferenças finitas com transformada de Fourier discreta com a função de distribuição linear permite manter ou aumentar a ordem de aproximação numérica usada no espaço e (3) o método Pseudo-espectral diminui a ordem de aproximação para um.*

Palavras-chave: *Equação de Difusão, Diferenças Finitas, Transformada de Fourier, Pseudo-Espectral de Fourier, Delta de Dirac, Método da Fronteira Imersa*

1 Introdução

Peskin [9] apresentou uma modelagem matemática e um método numérico para o estudo de problemas de interação fluido-estrutura, denominada Método da Fronteira Imersa, que considera: (1) um domínio retangular fixo de solução das equações do fluido que inclui a região ocupada pela estrutura imersa; (2) modelagem de um termo forçante singular definido no contorno da estrutura e acrescentado nas equações do fluido para impor a presença da estrutura. Se os pontos da interface coincidem com os pontos da solução numérica das equações do fluido, o termo forçante é aplicado diretamente; caso contrário, um processo de distribuição é aplicado.

O uso do domínio retangular fixo no MFI permite a aplicação de métodos numéricos eficientes já existentes, ao passo que a não definição de uma única expressão para o termo forçante gerou um conjunto de outras metodologias baseadas na filosofia do MFI ([8]).

Na atualidade, a solução numérica em uma malha homogênea das equações do MFI sujeita a condições de contorno periódicas, usa uma das seguintes discretizações no espaço: Método de Diferenças Finitas (MDF); Diferenças Finitas e Transformada de Fourier Discreta (DF/TFD);

e o Método Pseudo-Espectral de Fourier (**MPEF**). Estudos de verificação numérica mostram a diminuição da ordem da discretização usada no espaço. Por exemplo, quando se usam diferenças finitas de segunda ordem na discretização espacial, a ordem de convergência do MDF ([6]) e DF/TFD ([4]) diminui para um e o trabalho apresentado por Mariano [7], usando a discretização espacial MPEF (alta ordem para soluções suaves), mostra resultado de convergência numérica no espaço, também de primeira ordem.

Desde o aparecimento do MFI estudos como o de Beyer e Leveque [1] dentre outros, têm tentado descobrir como manter a ordem de aproximação do método numérico empregado na solução de equações do MFI. No contexto do MDF e para um problema unidimensional, Beyer e Leveque mostram o cuidado a ser tomado com a escolha da aproximação para o delta de Dirac, modelador da forçante singular, bem como a necessidade de acréscimo de termos adicionais nas discretizações usuais.

Este trabalho, tem por objetivo apresentar resultados de verificação numérica do comportamento da ordem da aproximação da conjugação do Método de Solução Numérica no espaço com a Função de Distribuição, usados na equação de difusão com termo fonte singular. Os métodos de discretização numérica no espaço são: MDF, DF/TFD e MPEF; no tempo, usou-se o método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem. Três funções de distribuição são estudadas, apresentadas na Seção 2.2.

2 Problema

No presente trabalho, as equações resolvidas numericamente são do tipo difusão estacionária, Eq. (1), e do tipo difusão transiente, Eq. (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x), \quad x \in [0, 2\pi]; \quad u(0) = u(2\pi) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, 2\pi], \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x); \quad u(0) = u(2\pi) \end{aligned} \quad (2)$$

sendo h e f os termos fontes singulares e $u_0(x)$ a condição inicial da Eq. de difusão (2).

Em [1], são reportadas soluções analíticas para as equações (1) e (2) definidas em $x \in [0, 1]$, sujeitas a condições de contorno Dirichlet homogêneas e termos fontes singulares:

$$h(x) = [u_x]_{x=\alpha} \delta(x - \alpha), \quad f(x, t) = c(\alpha, t) \delta(x - \alpha)$$

Onde os dados: $\alpha \in]0, 1[$ e $[u_x(\alpha)] = u_x(\alpha^+) - u_x(\alpha^-)$ são a localização da fonte e o salto na primeira derivada em $x = \alpha$, respectivamente. A “função” $\delta(x - \alpha)$, representa o delta de Dirac localizada em α .

2.1 Transformando Soluções não Periódicos em Periódicos

No presente trabalho, considerou-se equações (1) e (2), sujeitas às condições de contorno periódicas em 0 e 2π . Soluções analíticas para estes problemas são necessárias para o estudo da ordem da aproximação do método numérico empregado. Para a obtenção destas soluções analíticas, transformou-se as soluções apresentadas em [1] e definidas em $x \in [0, 1]$, em soluções definidas com base em $x \in [0, 2\pi]$; e a seguir efetuou-se uma extensão com período 2π . Na Figura 1-(a), apresenta-se a curva solução de uma EDP com condições de contorno do tipo Dirichlet homogênea (característica das soluções dadas em [1]) e na Figura 1-(b), a versão periódica para a mesma solução.

A Figura 1, mostra que a extensão periódica de uma solução nula nos extremos do intervalo, pode apresentar salto na primeira derivada nos extremos do intervalo, cuja modelagem na EDP

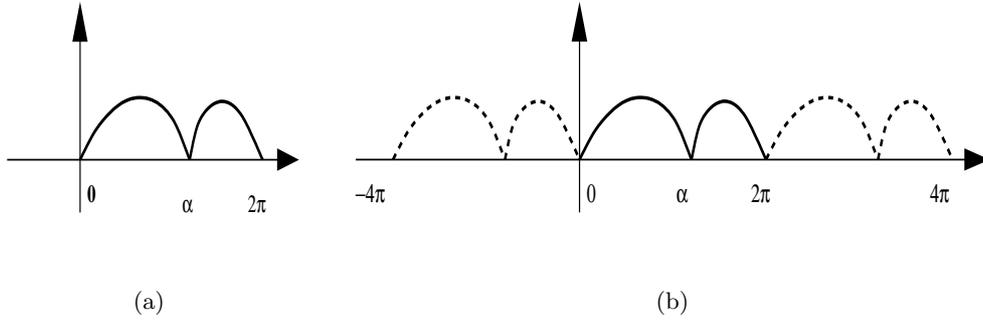


Figura 1: Transformação de solução não periódica em periódica.

é mediante dois termos fontes, além do termo fonte original localizado em $x = \alpha$ (termo fonte principal). Logo, o termo fonte total para o caso estacionário e transiente é, respectivamente:

$$h(x) = [u_x]_{x=0} \delta(x-0) + [u_x]_{x=\alpha} \delta(x-\alpha) + [u_x]_{x=2\pi} \delta(x-2\pi) \quad (3)$$

$$f(x, t) = c(0, t) \delta(x-0) + c(\alpha, t) \delta(x-\alpha) + c(2\pi, t) \delta(x-2\pi) \quad (4)$$

2.2 Aproximação do delta de Dirac

No MFI, usa-se a seguinte aproximação para o delta de Dirac: $\delta(x) \approx \frac{1}{h} \phi(x/h)$, onde $\phi(r)$ é uma das seguintes funções: $\phi^{(1)}(r)$, $\phi^{(2)}(r)$ e $\phi^{(3)}(r)$ (denominada distribuição linear), reportadas respectivamente em [9], em [10] e em [1].

$$\phi^{(1)}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \right) & , \text{ se } |r| \leq 2, \\ 0 & , \text{ se } |r| > 2, \end{cases} \quad \phi^{(3)}(r) = \begin{cases} 1 - |r| & , \text{ se } |r| \leq 1, \\ 0 & , \text{ se } |r| > 1, \end{cases}$$

$$\phi^{(2)}(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right) & , \text{ se } |r| \leq 1, \\ \frac{1}{8} \left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2} \right) & , \text{ se } 1 \leq |r| \leq 2, \\ 0 & , \text{ se } |r| > 2. \end{cases}$$

3 Metodologias Numéricas

As três metodologias numéricas usadas neste estudo, a saber, MDF, DF/TF e MPEF, calculam a solução em pontos discretos igualmente espaçados do intervalo de análise, $[0, 2\pi]$. Estes pontos discretos são denotados por $x_n = hn$, $n = 0, 1, \dots, N$ e, $h = \frac{2\pi}{N}$ (espaçamento da malha). No texto, a expressão u_n denota o valor da função, u em x_n , isto é, $u_n = u(x_n)$; i é o número imaginário e \bar{g} é o conjugado da função g .

3.1 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas tem como base a expressão em série de Taylor do valor de uma função em torno de um ponto. Baseado em tal série pode-se determinar a seguinte aproximação centrada de segunda ordem para a segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 u(x_n)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_n + h) - 2u(x_n) + u(x_n - h))}{h^2} \quad (5)$$

3.2 Diferenças Finitas e Transformada de Fourier Discreta

Dada uma sequência de N valores discretos, $u_n, n = 1, \dots, N$, as Transformadas de Fourier Discreta direta e inversa podem ser definidas, respectivamente, por:

$$U_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (6)$$

$$u_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} U_k e^{i\frac{2\pi nk}{N}} \quad n = 1, \dots, N. \quad (7)$$

A mistura de DF e TFD é no seguinte sentido: (a) aplica-se uma discretização baseada em diferenças finitas para os operadores espaciais; (b) o valor da função em cada nó é substituído pela Eq. (7). Simplificando-se o sistema e usando-se as propriedades de ortogonalidade das funções $\phi_k(n) = e^{i\frac{2\pi nk}{N}}$ em $[0, 2\pi]$ (com respeito ao produto interno dado por $\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \sum_{n=1}^N \phi_j(n) \bar{\phi}_k(n)$, [2]), obtém-se um sistema linear de equações nas incógnitas U_k . Conhecido o valor de U_k , o valor de u_n é obtido pela Eq. (7). O cálculo da Transformada de Fourier discreta é feito pela Fast Fourier Transformation (**FFT**) ([2]).

3.3 Método Pseudo-Espectral Fourier

No método Pseudo-Espectral Fourier as funções que aparecem na EDP são expressas como combinação linear das funções $\{e^{ikx}\}$ [3] (ortogonais com respeito ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$). Assim, por exemplo, a expressão para a função u é:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{ikx} \quad (8)$$

onde N é o número de elementos considerados da família ortogonal $\{e^{ikx}\}$ (para a malha com $N + 1$ nós). Neste caso, os cálculos da primeira e segunda derivada são, respectivamente:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^N ika_k e^{ikx}, \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^N -k^2 a_k e^{ikx}$$

Depois de se substituir as expressões de cada função expressadas na base $\{\phi_k(x) = e^{ikx}, k = 1 : N\}$ na EDP e usando-se o fato desta família ser ortogonal, determinam-se equações para os coeficientes a_k 's, $k = 1 : N$. Avaliando-se tais equações nos nós da malha, calculam-se os coeficientes e com isto, a solução u do problema.

Cada uma das metodologias citadas apresenta vantagens e desvantagens. Uma das principais vantagens do MPEF sobre as outras é a alta ordem de aproximação numérica em calcular a solução para uma equação com solução $u \in C^\infty$ ([3]). Ressalta-se que para problemas transientes, as variáveis u (em Eq. (5) e Eq. (6)), U_k (na Eq. (7)) e a_k (na Eq. 8) são dependentes do tempo.

4 Resultados

Neste trabalho, são considerados EDPs com soluções analíticas conhecidas e definidas em $x \in [0, 2\pi]$ ou $(x, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty[$ para problemas estacionários ou transientes, respectivamente, e com período 2π em x . Diferenças centradas de segunda ordem são usadas em MDF e DF/TFD e no caso do problema transiente a solução no tempo foi baseada no método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem. Por questão de estabilidade numérica, usou-se um passo no tempo igual $dt = \frac{1}{5}h^2$. Validação das metodologias usadas para problemas com termo fonte regular e soluções de classe C^∞ são reportados em [5].

A condição inicial para os problemas transientes é obtida pela avaliação da solução analítica conhecida em $t = 0$. Os resultados numéricos apresentados são para o caso do termo fonte singular aproximado pelas funções de distribuição $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(3)}$. Resultados com $\phi^{(2)}$ não são apresentados por serem iguais aos obtidos para a $\phi^{(1)}$. Dois casos para localização do termo fonte principal, α , são considerados: Caso I, coincidente com um nó da malha e Caso II, não coincidente com nenhum nó da malha.

4.1 Caso I: Termo Fonte Singular, α Coincidente com um Nó da Malha

4.1.1 Problema Estacionário

Considera-se a seguinte solução analítica para a Eq. (1):

$$u(x) = 5x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad u(x) = 10\pi\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right), \quad \pi \leq x \leq 2\pi,$$

com termo fonte principal localizado em $\alpha = \pi$ e termo fonte total calculado pela Eq. (3).

Na Tabela 1, apresenta-se a norma máxima dos erros obtidos, usando-se os três métodos e a função de distribuição $\phi^{(1)}$. Observa-se que conforme se duplica o número de nós, a razão das normas para os três métodos converge para 2, indicando um comportamento de métodos de primeira ordem. Além disso, os erros maiores foram obtidos com o MPEF.

A norma máxima dos erros associados ao uso da função de distribuição $\phi^{(3)}$ são mostrados na Tabela 2. Neste caso, o MPEF continua apresentando comportamento de primeira ordem, enquanto que o MDF e o DF/TFD apresentam alta ordem de aproximação. Note-se que os menores erros foram obtidos com o MDF, seguido do método DF/TFD com erros levemente maiores; e semelhantemente à experiência obtida com a $\phi^{(1)}$, o MPEF apresentou os erros maiores.

N	MDF		MPEF		DF/TFD	
	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão
16	1.96		2.31		1.96	
32	9.82e-01	1.99	1.16	1.99	9.82e-01	1.99
64	4.91e-01	2.00	5.79e-01	2.00	4.91e-01	2.00
128	2.45e-01	2.00	2.89e-01	2.00	2.45e-01	2.00

Tabela 1: Norma dos erros para o problema estacionário com malha coincidente empregando distribuição $\phi^{(1)}$.

N	MDF	MPEF	razão	DF/TFD
	$\ erro\ _\infty$	$\ erro\ _\infty$		$\ erro\ _\infty$
16	4.44e-15	7.92e-01		5.32e-15
32	3.55e-14	3.97e-01	1.99	1.06e-14
64	1.28e-13	1.99e-01	1.99	1.15e-13
128	9.41e-14	9.94e-02	2.00	1.40e-13

Tabela 2: Norma dos erros para o problema estacionário com malha coincidente empregando distribuição $\phi^{(3)}$.

4.1.2 Problema Transiente

A solução exata a ser considerada para a Eq. (2) é:

$$u(x, t) = \sin(x)e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad u(x, t) = \sin(2\pi - x)e^{-t}, \quad \pi \leq x \leq 2\pi$$

com salto na primeira derivada em $\alpha = \pi$. O termo fonte total da equação é calculado pela Eq. (4).

Nas tabelas 3 e 4 mostra-se a norma máxima dos erros, usando a função de distribuição $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(3)}$, respectivamente. Observa-se que independentemente da função de distribuição, o MPEF comporta-se como um método de primeira ordem. No caso do MDF e DF/TFD, o uso da função $\phi^{(1)}$ diminui a ordem do método, enquanto que a distribuição $\phi^{(3)}$ permite manter a ordem.

	MDF		MPEF		DF/TFD	
N	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão
16	1.03e-01		1.73e-01		1.44e-01	
32	7.23e-02	1.42	9.99e-02	1.73	8.75e-02	1.64
64	4.04e-02	1.79	5.23e-02	1.91	4.44e-02	1.97
128	2.12e-02	1.90	2.63e-02	1.99	2.22e-02	2.00

Tabela 3: Norma dos erros para o problema transiente em $t = 0, 1s$ com malha coincidente empregando distribuição $\phi^{(1)}$.

	MDF		MPEF		DF/TFD	
N	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão
16	7.37e-03		7.43e-02		8.51e-03	
32	2.03e-03	3.63	3.99e-02	1.86	2.31e-03	3.68
64	5.16e-04	3.93	2.01e-02	1.98	5.88e-04	3.93
128	1.29e-04	4.00	1.00e-02	2.00	1.48e-04	3.97

Tabela 4: Norma dos erros para o problema transiente em $t = 0, 1s$ com malha coincidente empregando distribuição $\phi^{(3)}$.

4.2 Caso II: Termo Fonte Singular, α não Coincidente com um Nó da Malha

4.2.1 Problema Estacionário

O termo fonte principal da Eq. (3), foi localizado em $\alpha = \frac{383}{384}\pi$, não coincidindo com nenhum nó da malha. A solução exata correspondente a Eq. (1) é:

$$u(x) = 5x, \quad 0 \leq x \leq \frac{383}{384}\pi, \quad u(x) = \frac{383}{77}\pi(2\pi - x), \quad \frac{383}{384}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

A norma máxima dos erros associados ao uso da função de distribuição $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(3)}$ é apresentada nas tabelas 5 e 6, respectivamente. Note-se que de modo independente da função de distribuição, o método MPEF comporta-se como um método de primeira ordem, enquanto que para os métodos MDF e DF/TFD, a escolha da função de distribuição influencia na ordem do método: primeira ordem, usando $\phi^{(1)}$ e alta ordem, usando $\phi^{(3)}$.

Observando-se as tabelas 5 e 6, os erros do MPEF, usando $\phi^{(3)}$, são pelo menos duas vezes menores que os obtidos usando-se $\phi^{(1)}$; no caso do MDF e DF/TFD tal diferença ainda é maior: os erros usando $\phi^{(3)}$ são pelo menos $10e+12$ vezes menor que os obtidos com a função $\phi^{(1)}$.

4.2.2 Problema Transiente

Neste caso, a solução exata considerada para a Eq. (2) é dada por:

$$u(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \exp\left(-\frac{9}{4}t\right), \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \quad u(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}x\right) \exp\left(-\frac{9}{16}t\right), \quad \frac{2}{3}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

O termo fonte singular principal da Eq. (4) está localizado em $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

	MDF		MPEF		DF/TFD	
N	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão
16	1.92		2.27		1.92	
32	9.39e-01	2.04	1.11	2.04	9.39e-01	2.04
64	4.51e-01	2.08	5.38e-01	2.06	4.51e-01	2.08
128	2.08e-01	2.16	2.51e-01	2.14	2.08e-01	2.16

Tabela 5: Norma dos erros para o problema estacionário com malha não coincidente empregando distribuição $\phi^{(1)}$.

	MDF		MPEF		DF/TFD	
N	$\ erro\ _\infty$		$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	
16	3.55e-15		7.80e-01		3.55e-15	
32	1.95e-14		3.67e-01	2.01	1.60e-14	
64	1.63e-13		1.89e-01	2.05	1.30e-13	
128	7.10e-14		9.90e-02	1.91	1.90e-12	

Tabela 6: Norma dos erros para o problema estacionário com malha não coincidente empregando distribuição $\phi^{(3)}$.

Para a função $\phi^{(1)}$, os erros para os três métodos são apresentados na Tabela 7, mostrando um comportamento de primeira ordem. De modo semelhante aos resultados apresentados para problemas transientes com termo fonte localizado em um nó da malha, os maiores erros foram obtidos com o MPEF, seguido do DF/TFD e do MDF, constando este último, dos maiores erros.

	MDF		MPEF		DF/TFD	
N	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão
16	7.64e-02		1.84e-01		1.52e-01	
32	6.45e-02	1.18	1.06e-01	1.73	9.25e-02	1.64
64	3.97e-02	1.62	5.53e-02	1.92	4.68e-02	1.98
128	2.16e-02	1.84	2.78e-02	1.99	2.36e-02	1.98

Tabela 7: Norma dos erros para o problema transiente $t = 0, 1s$ com malha não coincidente empregando distribuição $\phi^{(1)}$.

Os erros obtidos com termo fonte distribuído segundo a função $\phi^{(3)}$ são apresentados na Tabela 8. Nessa tabela, observa-se que o método MPEF continua apresentando comportamento de primeira ordem, enquanto que o MDF e o DF/TFD mantêm a segunda ordem.

Comparando os erros mostrados na Tabela 7 e 8, observa-se que o uso de $\phi^{(3)}$ permite obter menores erros que os obtidos com a função $\phi^{(1)}$.

5 Conclusão

Neste trabalho, apresentou-se um estudo comparativo da influência da função de distribuição na ordem da aproximação do método de solução numérico usado na equação de difusão com termo fonte singular (localizado em um ponto coincidente ou não com um nó da malha). Três diferentes funções de distribuição ($\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ e $\phi^{(3)}$) foram usadas. Resultados associados a $\phi^{(2)}$ foram semelhantes a $\phi^{(1)}$, mas não foram apresentados.

As seguintes conclusões foram obtidas das experiências numéricas feitas: (1) em cada problema resolvido, os menores erros foram obtidos usando-se a função de distribuição linear $\phi^{(3)}$; (2) em cada caso, o MDF apresentou os menores erros, seguido do DF/TFD; (3) o uso da função de distribuição $\phi^{(1)}$ nos métodos MDF e DF/TDF, fez com que os resultados apresentassem um comportamento de primeira ordem, enquanto que o uso da $\phi^{(3)}$, permitiu manter ou au-

	MDF		MPEF		DF/TFD	
N	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão	$\ erro\ _\infty$	razão
16	4.86e-03		7.62e-02		1.75e-02	
32	1.28e-03	3.80	4.19e-02	1.82	4.72e-03	3.71
64	3.21e-04	3.99	2.11e-02	1.98	1.20e-03	3.93
128	8.06e-05	3.98	1.06e-02	1.99	3.00e-04	4.00

Tabela 8: Norma dos erros para o problema transiente em $t = 0,1s$ com malha não coincidente empregando distribuição $\phi^{(3)}$.

mentar a ordem; (4) o método Pseudo-espectral apresentou comportamento de primeira ordem independentemente da experiência numérica e da função de distribuição, com erros menores usando a $\phi^{(3)}$.

6 Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- [1] R. P. Beyer, R. J. Leveque, Analysis of a One-Dimensional Model for the Immersed Boundary Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 (1992) 332-364.
- [2] W. L. Briggs and V. E. Henson, “The DFT”, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [3] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, “Spectral Methods in Fluid Dynamics”, Springer-Verlag, 1997.
- [4] S.A. Enriquez-Remigio and A. M. Roma, Incompressible flows in elastic domains: an Immersed Boundary Method approach, *Appl. Math. Model.*, 29 (2005) 35-54.
- [5] S.A. Enriquez-Remigio, F.C. Miranda, A. Silveira-Neto, Solução numérica da equação de difusão unidimensional com termo fonte singular por intermédio do Método de Diferenças Finitas e/ou Método Pseudo-espectral Fourier-Parte I, ERMAC 2007, UFU.
- [6] M-C. Lai, “Simulation of the flow Past an Array of Circular Cylinders as a Test of the Immersed Boundary Method”, Ph.D. thesis, New York University, 1998.
- [7] F. P. Mariano, “Simulação de Escoamentos Não-periódicos utilizando as Metodologias Pseudo-espectral e da Fronteira Imersa Acopladas”, Dissertação de Mestrado, FEMEC-UFU, 2007.
- [8] R. Mittal and G. Iaccarino, Immersed boundary methods, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 (2001) 239-261.
- [9] C. S. Peskin, Flow patterns around heart valves: a numerical method, *J. Comput. Phys.*, 10 (1972) 252-271.
- [10] C. S. Peskin, The immersed boundary method, *Acta Numerica*, pp. 1-39, 2002.