

Formulação de Petrov-Galerkin para solução de problema de secagem de grãos

Tatiane Reis do Amaral, **João Francisco A. Vitor**

Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, CEFET-MG,
30510-000, Belo Horizonte, MG

E-mail: tatiane@dppg.cefetmg.br, joaofrancisco@dppg.cefetmg.br

José Leôncio F. Souza

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade Pitagoras
30.380-650, Belo Horizonte, MG

E-mail: jleonciofs@gmail.com

Rudolf Huebner

Departamento de Engenharia Mecânica, UFMG,
31270-901, Belo Horizonte, MG

E-mail: rudolf@demec.ufmg.br

Resumo: *O processo de Secagem artificial de grãos permite baixar rapidamente o teor de umidade dos produtos agrícolas, facilitando o processo de armazenamento e conservação. Neste trabalho simulou-se a secagem de grãos em um secador cilíndrico com fluxos radial e axial de ar com leito estacionário. Foram resolvidas equações teor de umidade do leito, temperatura do leito de grãos, umidade absoluta do ar e temperatura do Ar. Trata-se de um problema puramente convectivo e sua resolução é obtida neste trabalho através de técnicas numéricas. Utilizou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), empregado de duas formas, a formulação de Galerkin e o método 'Streamline Upwind Petrov-Galerkin' (SUPG). Verificou-se resultados satisfatórios para as duas formulações quando utilizados passos de tempo iguais. A aplicação do Método SUPG permitiu que houvesse um tamanho do passo de tempo superior a formulação clássica do MEF.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos, Petrov-Galerkin, Secagem*

1 Introdução

Na simulação da secagem de grãos em leito estacionário, [1] apresenta um modelo para um secador unidimensional e bidimensional utilizando volumes finitos e elementos finitos, baseado nas equações de secagem em camada fina. Para simulação de um secador axissimétrico [3] apresenta um modelo, baseado no modelo de [1], comparando com os dados experimentais de um secador real da EMBRAPA.

A formulação de Petrov-Galerkin é empregada na resolução do modelo de [3]. Este modelo descreve o processo de secagem de grãos em um secador de fluxo radial axial de ar. A partir das equações de continuidade e energia do ar úmido e do leito de grãos, são desenvolvidas equações acopladas. As equações de Umidade Absoluta do Ar e da Temperatura do Leito são resolvidas através do método dos elementos finitos e as equações do teor de umidade do leito e temperatura do leito pelo método de diferenças finitas.

O modelo de [3] utiliza o método dos elementos finitos com a formulação de Galerkin com passo de tempo constante para as equações resolvidas pelo MEF. Em problemas onde a convecção é predominante a formulação de Galerkin clássica do método de Elementos Finitos pode

apresentar oscilações espúrias contornadas através da escolha apropriada da malha espacial e temporal.

Neste trabalho as equações são resolvidas pelo (MEF) utilizando a formulação de Petrov-Galerkin, devido ao modelo tratado ser puramente convectivo, com o objetivo de comparar com solução obtida por [3].

O número adimensional de Peclet $Pe \in [0, \infty]$ é então empregado para determinação das contribuições dos termos convectivos e termos difusivos para equação diferencial parcial convectiva-difusiva.

$$Pe = Uh/2k \quad (1)$$

Nos casos em que $Pe \leq 1$ indica que a contribuição do termo difusivo é predominante na resolução, quando Pe é maior que esse limite significa que a contribuição maior é do termo convectivo [5]. Quando isso ocorre a formulação de Galerkin pode apresentar distorções e oscilações na resolução. A formulação de Petrov-Galerkin sugere uma nova função de ponderação capaz de minimizar ou eliminar esses problemas.

A formulação de Petrov-Galerkin utilizada neste trabalho é 'Streamline Upwind Petrov-Galerkin'(SUPG). Este método introduz uma estabilidade consistente na direção das linhas de corrente. É obtido um coeficiente ótimo chamado parâmetro 'upwind'(α), utilizado na nova função de ponderação do método (SUPG).

Uma forma de tratamento da formulação de Petrov-Galerkin é apresentada por Sampaio [2], e será utilizada neste trabalho. Seguindo os critérios da formulação para problemas convectivos-difusivos, é obtida uma nova função ponderadora (w).

2 Simulação de secagem de grãos em um secador axissimétrico

Neste trabalho é apresentado o modelo descrito por [3] para simulação da secagem de grãos em um secador axissimétrico. A solução das equações diferenciais, que serão estudadas neste trabalho, foi efetuada com o emprego do Método dos Elementos Finitos e de Diferenças Finitas.

Os resultados apresentados por [3] foram comparados em seu trabalho com dados experimentais. Para o secador axissimétrico simulou-se a mesma geometria de um secador real utilizado na EMBRAPA e os resultados obtidos foram comparados com dados reais coletados na Empresa.

A equações diferenciais parciais a serem resolvidas juntamente com as suas respectivas condições iniciais e de contorno estão resumidas abaixo.

- Teor de Umidade do leito:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{M_e - M}{3600\sqrt{A^2 + (1/900)Bt}} \quad (2)$$

$$0 \leq z \leq 3,60 \quad t > 0 \quad 0,40 \leq r \leq 1,0$$

Condição Inicial:

$$M = M_0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 3,60 \\ 0,40 \leq r \leq 1,0 \end{array} \quad t = 0$$

onde M é o teor de umidade do leito;

M_e é o teor de umidade de equilíbrio;

A e B são valores específicos do milho para faixa de pressão desejada.

- Umidade absoluta do ar:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\vec{v}_r}{\epsilon}\right) \frac{W}{r} + \frac{1}{\epsilon} \left[\vec{v}_r \frac{\partial W}{\partial r} + \vec{v}_z \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (3)$$

$$0 \leq z \leq 3,60 \quad t > 0 \quad 0,40 \leq r \leq 1,0$$

Condição de Contorno 1:

$$W = W_{in} \quad \begin{array}{l} z=0 \\ 0,40 \leq r \leq 1,0 \end{array} \quad t > 0$$

Condição Contorno 2:

$$W = W_{in} \quad \begin{array}{l} r=0,40 \\ 0 \leq z \leq 3,6 \end{array} \quad t > 0$$

Condição Inicial:

$$W = W_0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 3,60 \\ 0,40 \leq r \leq 1,0 \end{array} \quad t = 0$$

onde W é a umidade absoluta do ar;

ϵ é a porosidade do leito (volume de poros/ volume total);

ρ_p é a massa específica do produto;

ρ_a é a massa específica do ar;

\vec{v} vetor velocidade do ar (m/s).

- Temperatura do Ar:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\vec{v}_r}{\epsilon r} \right) T + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + W c_v)} \quad (4)$$

$$0 < z \leq 3,60 \quad t > 0 \quad 0,40 < r \leq 1,0$$

Condição de Contorno 1:

$$T = T_{in} \quad \begin{array}{l} z=0 \\ 0,40 \leq r \leq 1,0 \end{array} \quad t > 0$$

Condição Contorno 2:

$$T = T_{in} \quad \begin{array}{l} r=0,40 \\ 0 \leq z \leq 3,6 \end{array} \quad t > 0$$

Condição Inicial:

$$T = T_0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 3,60 \\ 0,40 \leq r \leq 1,0 \end{array} \quad t = 0$$

onde T é a temperatura do ar;

h é coeficiente convectivo (W/m^2K);

c é o calor específico ($J/kg K$);

- Temperatura do leito:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{h_a(T - \theta)}{\rho_p(c_p + c_w M)} + \frac{h_{fg} + c_v(T - \theta)}{(c_p + c_w M)} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (5)$$

$$0 \leq z \leq 3,60 \quad t > 0 \quad 0,40 \leq r \leq 1,0$$

Condição Inicial:

$$\theta = \theta_0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 3,60 \\ 0,40 \leq r \leq 1,0 \end{array} \quad t = 0$$

onde θ é a temperatura do leito;

h_{fg} é o calor latente de vaporização da água ($J.kg$)

3 Discretização das Equações

O problema tratado neste trabalho apresenta a equação de Umidade Absoluta do Ar e Temperatura do Ar. Estas equações são puramente convectivas e para obtermos a função de ponderação w apresentaremos a discretização de cada uma dessas equações.

- Umidade absoluta do ar:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \left[\vec{v}_r \frac{\partial W}{\partial r} + \vec{v}_z \frac{\partial W}{\partial z} \right] = - \frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (6)$$

A equação (6) é discretizada no tempo por um esquema central:

$$A + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} = 0 \quad (7)$$

onde temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} + \frac{(\vec{v}_r + \vec{v}_z)}{\epsilon} \cdot \nabla W^{1/2} \\ \nabla W^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(W^{n+1} + W^n) \end{aligned}$$

Para discretizar a Umidade Absoluta do Ar no espaço utiliza-se Elementos Finitos

$$W^{\hat{n}+1} = N_j W_j^{n+1}$$

onde W_j^{n+1} é o valor nodal no tempo $n + 1$ e N_j é a função de forma associada.

Das equações anteriores podemos escrever \hat{A} ,

$$\hat{A} = \frac{W^{\hat{n}+1} - \hat{W}^n}{\Delta t} + \frac{(\vec{v}_r + \vec{v}_z)}{\epsilon} \cdot \nabla W^{n+1/2} \quad (8)$$

O quadrado dos Resíduo devido à aproximação de A por \hat{A} é dada por:

$$R = \int_{\Omega} [\hat{A} - A]^2 d\Omega \quad (9)$$

Substituindo (7) em (9) obtemos

$$R = \int_{\Omega} \left[\hat{A} + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right]^2 d\Omega \quad (10)$$

O quadrado do resíduo deve ser minimizado com relação aos parâmetros livres W_j^{n+1} .

$$\frac{\partial R}{\partial w_j^{n+1}} = \int_{\Omega} 2 \left[\hat{A} + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right] \frac{\partial \hat{A}}{\partial w_j^{n+1}} d\Omega = 0 \quad (11)$$

A equação acima é equivalente ao método de Petrov-Galerkin com as funções peso $N_i + w_i = w_a$.

$$\int_{\Omega} (w_a) \left[\hat{A} + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right] d\Omega = 0 \quad (12)$$

$$w_i = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\vec{v}_r + \vec{v}_z}{\epsilon} \right) \nabla N_i \quad (13)$$

Discretizando a equação equação da Umidade Absoluta do Ar, utilizando a formulação de Sampaio [2] e reescrevendo a equação (12), obtemos:

$$\int_{\Omega} (w_a) \left[\left(\frac{W^{\hat{n}+1} - W^{\hat{n}}}{\Delta t} + \frac{(\vec{v}_r + \vec{v}_z)}{\epsilon} \cdot \nabla W^{\hat{n}+1/2} \right) + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right] d\Omega = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} (w_a) \left(\frac{W^{\hat{n}+1} - W^{\hat{n}}}{\Delta t} + \frac{(\vec{v}_r + \vec{v}_z)}{\epsilon} \cdot \nabla W^{\hat{n}+1/2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (w_a) \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} d\Omega = 0 \quad (15)$$

Considerando como limite o regime permanente, quando os valores de \hat{W} no instante $n+1$ tendem ao valores de \hat{W} no instante n , a formulação de Sampaio para equação acima é

$$\int_{\Omega} (w_a) \left(\frac{(\vec{v}_r + \vec{v}_z)}{\epsilon} \cdot \nabla W^{\hat{n}+1} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (w_a) \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial W}{\partial t} \right)^{(n+1)} d\Omega = 0 \quad (16)$$

Procedendo de forma analoga obtemos a discretização da equação da Temperatura do Ar.

$$\int_{\Omega} (w_a) \left(\frac{(\vec{v}_r + \vec{v}_z)}{\epsilon} \cdot \nabla T^{\hat{n}+1} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (w_a) \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + W c_v)} \right)^{(n+1)} d\Omega = 0 \quad (17)$$

4 Metodologia e Resultados

Aplicado o método SUPG para solução do problema com o mesmo passo de tempo utilizado por [3] obtemos resultados semelhantes. Foi utilizado o tamanho do passo de tempo constante de 40 segundos, para formulação de Galerkin e para formulação SUPG.

Aumentando o tamanho do passo de tempo indiscriminadamente ocorreram grandes distorções numéricas nos resultados nos primeiros passos de tempo da resolução com a entrada abrupta das condições iniciais, quando usado método direto de inicialização. Uma técnica que para solucionar o problema é a utilização de uma função de suavização [4], para promover uma redução do tamanho do passo de tempo nos primeiros momentos.

A função de suavização utilizada é a apresentada em [4]:

$$\eta(\phi) = 1 - \exp(\phi) \quad (18)$$

onde $\phi = t/\tau$ e τ é um fator de suavização adequado. O passo de tempo inicial foi de 4 segundos chegando ao passo de tempo de 100 segundos.

As medidas experimentais foram realizadas com 4, 8 e 12 horas de secagem em três alturas do secador com 0,36m , 1,80m e 3,60m. Num total de nove pontos em três posições do raio na altura fixada.

Na Figura 1, Figura 2 são apresentadas as soluções no raio do secador. Comparadas com os dados experimentais e o realizado com a formulação de Galerkin, com a formulação de SUPG.

Na Figura 3 é apresentado o Teor de umidade do leito no tempo para uma vazão de ar de $9500m^3/s$ com a temperatura do ar de $42^\circ C$ na entrada do secador.

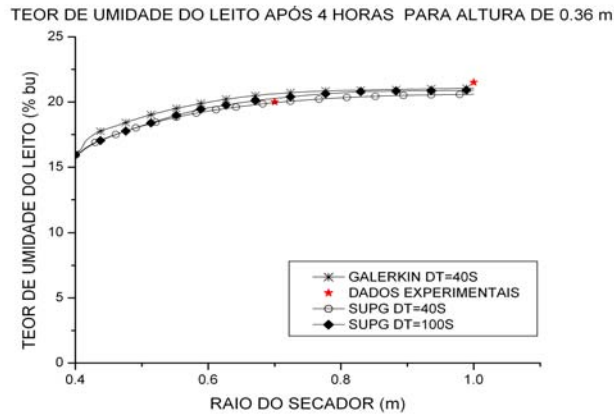


Figura 1: Perfil do Teor de Umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 0,36m, com a temperatura do ar igual a 42°C

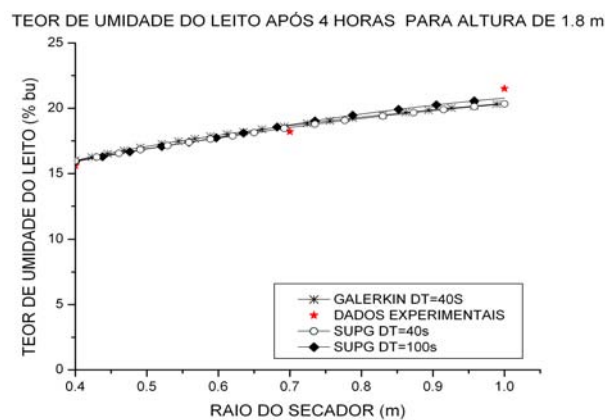


Figura 2: Perfil do Teor de Umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 1,8m, com a temperatura do ar igual a 42°C

5 Conclusão

Os resultados obtidos apontam a economia de tempo e esforço computacional na adoção do método de SUPG aplicado ao problema de secagem proposto por [3]. Os resultados são confirmados pelos resultados experimentais apresentados. O refinamento adequado da malha temporal resulta em soluções aceitáveis.

Uma proposta futura é a adoção de um passo adaptativo de tempo, onde a escolha do tamanho do passo de tempo é feita automaticamente, através do erro local, uma vez que a formulação de Petrov-Galerkin admite passos de tempo superiores àqueles permitidos pela formulação clássica de Galerkin.

Referências

- [1] A. S. França and M. Fortes, Numerical simulation of intermittent and continuous deep-bed drying of biological materials, *Drying Technology*, 12(7) (1994) 1537-1560.
- [2] P. A. B. De Samapaio, A petrov-galerkin formulation for the incompressible navier-stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 31 (1991) 1135-1149.

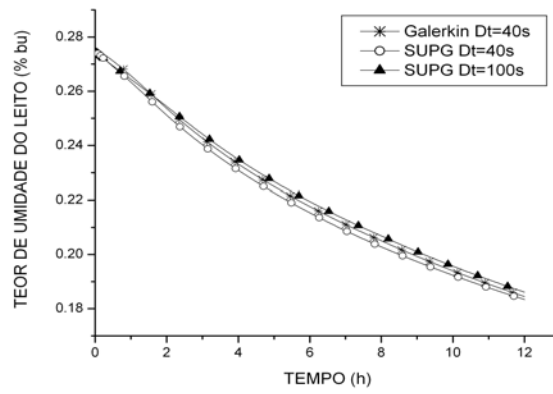


Figura 3: Perfil do Teor de Umidade do leito com o tempo (Fluxo de Ar=9500 m^3/h)

- [3] J. L. F. Souza, Simulação de Secador Cilíndrico de Grãos com Fluxos Radial e Axial de Ar, Dissertação de Mestrado, UFMG, 1996.
- [4] R. C. Vieira and E. C. Biscaia JR., An overview of initialization approaches for differential-algebraic equations, *Latin American Applied Research*, 30 (2000) 303-313.
- [5] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The Finite Element Method, Butterworth-Heinemann, Woburn, 2000.