

Técnicas Intervalares em Otimização Global

Douglas S. Gonçalves , Márcia A. Gomes-Ruggiero,

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP,
13083-970, Campinas, SP

E-mail: douglasgoncalves@ime.unicamp.br, marcia@ime.unicamp.br.

Resumo: Neste trabalho realizamos o estudo de técnicas em Análise Intervalar aplicadas em um algoritmo tipo branch-and-bound para a resolução do problema de otimização global irrestrita. Testes de monotonicidade e não convexidade, desigualdades intervalares, box consistency e o método de Newton Intervalar são descritos e aplicados em etapas estratégicas do método branch-and-bound. Os métodos de busca local e Back-Boxing para acelerar o processo de resolução também foram empregados. Algoritmos branch-and-bound intervalares foram implementados e comparados, com base na resolução de 25 problemas teste extraídos da literatura.

Palavras-chave: Análise Intervalar, Branch-and-Bound, Back-Boxing, Otimização Global

1 O Problema de Otimização Global

De um modo geral, o problema de otimização global pode ser definido como encontrar $\bar{x} \in X^0$, $X^0 \subset \mathbb{R}^n$, tal que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in X^0$:

$$\min_{x \in X^0} f(x). \quad (1)$$

O ponto \bar{x} é chamado *minimizador global* de f em X^0 .

Em muitos problemas de otimização, encontrar uma solução local é suficiente. Porém em alguns problemas há a necessidade de se encontrar o mínimo global. Dentre outras áreas estes problemas aparecem na Economia, na Engenharia Química, em problemas de design, etc, [3].

Neste trabalho, consideramos o problema de encontrar o *mínimo global* de uma função $f : X^0 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f \in \mathbb{C}^2$ e $X^0 \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto definido por restrições de canalização, $X^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$. Na verdade, se f é *coerciva*, então é possível encontrar uma caixa $X^0 \subset \mathbb{R}^n$ que contenha todos os minimizadores globais de f .

Analisamos a aplicação da teoria de Análise Intervalar [5], [12], em um método do tipo branch-and-bound, resultando na elaboração de algoritmos para otimização global irrestrita. Neste desenvolvimento consideramos técnicas e heurísticas já propostas, [5], [7], [8]. Algoritmos foram implementados e aplicados a um conjunto de problemas teste extraídos da literatura [1], [3], [9]. Comparamos os resultados obtidos com trabalhos anteriores, [13], atestando a confiabilidade de nossos algoritmos.

Na Seção 2 é feita uma breve descrição de um método branch-and-bound. A Seção 3 trata da aplicação de técnicas em análise intervalar. A Seção 4 destaca a importância de bons métodos locais na resolução global do problema de otimização. A Seção 5 apresenta os resultados numéricos obtidos e conclusões são apresentadas na Seção 6.

2 Branch-and-Bound

Em um método branch-and-bound (BB) a região viável X^0 é sucessivamente particionada em subregiões menores (*branching*) X^i , dando origem a subproblemas:

$$P_i: \min_{x \in X^i} f(x). \quad (2)$$

A melhor solução dentre as soluções globais dos subproblemas P_i é também solução global de (1). Portanto o próximo passo é resolver os subproblemas (2).

Para cada subproblema P_i são determinados limitantes inferiores (*lower bounds*) e superiores (*upper bounds*) para a solução, que denotaremos por $\beta(X^i)$ e $\alpha(X^i)$ respectivamente (*bounding*). Além disso definimos $\beta = \min_{i \in I} \beta(X^i)$ e $\alpha = \min_{i \in I} \alpha(X^i)$, onde I é o conjunto de índices dos subproblemas P_i que ainda não foram *processados*.

Em seguida *selecionamos* alguns (ou todos) subproblemas P_i , e cada um destes é novamente particionado em subproblemas ainda menores, e assim por diante. Um critério prático de parada é $\alpha - \beta < \varepsilon$, pois $\beta \leq \min_{x \in X^0} f(x) \leq \alpha$. Além disso, se para um dado subproblema P_k , temos que $\beta(X^k) > \bar{f}$, onde \bar{f} denota o menor valor de função objetivo até o momento, então P_k pode ser *descartado*, pois o mínimo global não pode ser alcançado em tal subproblema, [1], [6]. Neste sentido, um algoritmo branch-and-bound é interrompido também quando não há mais caixas a serem processadas.

3 Aplicações da Análise Intervalar

As técnicas de análise intervalar podem ser aplicadas durante o processo BB, [5], [8], sobretudo para incrementar os critérios de *descarte*, identificando e eliminando regiões onde o mínimo global não pode ocorrer.

- **Obtenção de limitantes:** a análise intervalar pode ser usada na obtenção de limitantes inferiores e superiores de f para os subproblemas gerados. Para tanto, podemos tomar a *extensão intervalar natural* de f sobre uma dada caixa X , [5].

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, é uma função racional, então para obter a *extensão intervalar natural*, denotada por $f(X)$, basta substituir os argumentos de f por intervalos e as operações da aritmética usual, pela aritmética intervalar, [12]. A extensão intervalar natural $f(X)$ é uma *função de inclusão* para f em X , isto é, se $\square f(X)$ denota a imagem de f sobre X , temos que $\square f(X) \subset f(X)$. Podemos também obter *funções de inclusão* para f em X , através de expansões apropriadas, baseadas em expansões de Taylor com resto de Lagrange e funções de inclusão para as derivadas parciais de f . Tais funções de inclusão são chamadas de *formas centradas*, [5], [8].

Em nossos algoritmos optamos por utilizar a extensão intervalar natural da função f em um dado intervalo, pela simplicidade na implementação. Os limitantes obtidos dessa forma podem ser melhorados após o *teste de monotonicidade*.

- **Teste de monotonicidade:** seja $X \subset X^0$ uma caixa no interior de X^0 . Se não existe $x \in X$ tal que $\nabla f(x) = 0$, então X não pode conter um minimizador global. Para realizar este teste basta considerar uma extensão intervalar $\nabla f(X)$ do gradiente da f em X . Se $0 \notin \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(X)$ para algum i , então $\nabla f(x)$ não possui nenhum zero em X , logo X pode ser descartada. Esse teste é chamado *teste de monotonicidade*, [5], [8].

Se a caixa X não foi eliminada pelo teste de monotonicidade, aproveitamos a avaliação de $\nabla f(X)$ para obter a *forma centrada do Valor Médio*: $T_M(X) = f(x) + \nabla f(X)^T(X - x)$, onde $x = m(X)$, o *centro* da caixa X . Realizamos a interseção dos limitantes obtidos aqui, com aqueles obtidos anteriormente pela extensão intervalar natural: $f(X) \cap T_M(X)$. Isso pode melhorar os limitantes de f em X .

- **Teste de não convexidade:** se \bar{x} é um minimizador irrestrito de f , seja local ou global, temos que $\nabla^2 f(x) \geq 0$ para todo $x \in V(\bar{x})$. Por outro lado, uma condição necessária para que $\nabla^2 f(x)$ seja semi-definida positiva é que os elementos da diagonal $\nabla^2 f(x)_{ii}$ sejam não negativos para todo i . Consideremos novamente uma caixa $X \subset X^0$, e $H(X)$ uma extensão intervalar para a Hessiana da f em X . Se $H_{ii}(X) < 0$ para algum i , então $\nabla^2 f(x)_{ii} < 0$ para todo $x \in X$, e portanto $\nabla^2 f(x)$ não pode ser semi-definida positiva em nenhum ponto de X . Logo podemos descartar X . Este é chamado *teste de não convexidade*, [5].

- **Desigualdade intervalar:** considere a forma centrada do Valor Médio para f em uma dada caixa X de centro em x , gerada no processo BB:

$$\square f(X) \subset f(x) + \nabla f(X)^T (X - x) = f(x) + \sum_{j \neq i} \nabla f(X)_j \cdot (X_j - x_j) + \nabla f(X)_i (X_i - x_i). \quad (3)$$

Nos interessam na caixa X apenas os pontos x nos quais $f(x) \leq \bar{f}$, ou seja:

$$f(x) + \sum_{j \neq i} \nabla f(X)_j \cdot (X_j - x_j) + \nabla f(X)_i (X_i - x_i) \leq \bar{f}.$$

Assim, tomando

$$U = f(x) + \sum_{j \neq i} \nabla f(X)_j \cdot (X_j - x_j) - \bar{f}, \quad V = \nabla f(X)_i \quad \text{e} \quad t = X_i - x_i,$$

obtemos uma desigualdade intervalar linear $U + Vt \leq 0$.

O conjunto solução da desigualdade intervalar acima, para $U = [a, b]$ e $V = [c, d]$, pode ser obtido reescrevendo-a como

$$U + Vt = (-\infty, 0]$$

e usando aritmética intervalar

$$T = \frac{(-\infty, -a]}{[c, d]}.$$

Após obter T realizamos a seguinte atualização:

$$\begin{aligned} X'_i &= T + x_i \\ X_i &= X'_i \cap X_i \end{aligned}$$

Se a interseção acima resultar em um conjunto vazio, mostramos que não há ponto $x \in X$ tal que $f(x) \leq \bar{f}$, logo toda a caixa X pode ser descartada. Senão, a interseção $X'_i \cap X_i$, preservará apenas a parte da caixa X que satisfaz $f(x) \leq \bar{f}$.

- **Box consistency:** considere uma equação do tipo $f(x, y) = 0$, com x pertencente a um intervalo X e y pertencente a um intervalo Y . Dizemos que $\hat{x} \in X$ e $\hat{y} \in Y$ são *consistentes* com relação a equação anterior, se fixado \hat{x} , existe $y \in Y$ tal que $f(\hat{x}, y) = 0$ e, se fixado \hat{y} existe $x \in X$ tal que $f(x, \hat{y}) = 0$. Assim se existem valores de $x \in X$, para os quais não existe $y \in Y$ tal que a equação se cumpra, então tais valores de x podem ser descartados, já que nosso objetivo é encontrar as soluções de $f(x, y) = 0$. Tal conceito pode ser estendido a mais variáveis, [5].

A linearização utilizada em (3) é com relação a todas as variáveis. Podemos utilizar também o conceito de box consistency, para verificar de $f(x) \leq \bar{f}$ em uma determinada caixa X . Ao utilizar este conceito, linearizamos f com respeito a uma variável por vez, fixando as demais em seus intervalos:

$$q(x_i) = f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, x_i, X_{i+1}, \dots, X_n) \leq \bar{f}. \quad (4)$$

Podemos reescrever a desigualdade (4) como:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, x_i, X_{i+1}, \dots, X_n) + [-\bar{f}, \infty) = 0. \quad (5)$$

Aplicando o método de Newton Intervalar a equação (5) com respeito a variável x_i , podemos obter uma redução na i -ésima coordenada.

A estratégia box consistency também pode ser aplicada sobre a equação $\nabla f(x) = 0$, para eliminar regiões de X que não contêm pontos estacionários de f . Este também é o propósito

do método de Newton Intervalar como veremos a seguir. Todavia, segundo [5], box consistency funciona melhor em caixas *grandes*, enquanto o Newton intervalar funciona melhor em caixas *pequenas*.

Perceba que $\nabla f(x) = 0$ é um sistema de equações não lineares. Assim, aplicamos box consistency a cada uma das equações $\nabla f(x)_j = 0$, com respeito a uma, algumas, ou todas as variáveis x_i .

- **Newton intervalar:** considere a expansão de primeira ordem de Taylor (com resto de Lagrange) em torno de \bar{x} , para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$f(\bar{x}) = f(x) + J_f(\xi)(\bar{x} - x),$$

onde ξ é uma combinação convexa de x e \bar{x} , e J_f denota a Jacobiana de f . Seja X uma caixa em \mathbb{R}^n contendo x e \bar{x} , e $J(x, X)$ uma função de inclusão para J_f em X . Temos que:

$$f(\bar{x}) \in f(x) + J(x, X)(\bar{x} - x),$$

e se \bar{x} é um zero de f em X então: $0 \in f(x) + J(x, X)(\bar{x} - x)$. Logo, nos interessa a solução do *sistema linear intervalar*:

$$J(x, X)(y - x) = -f(x),$$

que é dada pelo conjunto: $S = \{y \in \mathbb{R}^n : f(x) + J(x, x')(y - x) = 0, J(x, x') \in J(x, X)\}$. O sistema linear intervalar pode ser resolvido através da versão intervalar da eliminação Gaussiana ou Gauss-Seidel Intervalar, além de outros métodos, [8].

Assim definimos a iteração do Método de Newton Intervalar como

$$J(x^k, X^k)[N(x^k, X^k) - x^k] = -f(x^k) \quad (6)$$

$$X^{k+1} = X^k \cap N(x^k, X^k), \quad (7)$$

onde normalmente tomamos $x^k = m(X^k)$. A solução do sistema linear intervalar denotada por $N(x^k, X^k)$ é denominado *operador de Newton Intervalar*.

As principais propriedades do Método de Newton Intervalar são descritas a seguir. Para uma exposição mais formal e demonstração das mesmas, ver [5].

- Se existe $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = 0$, e se $x \in X$, então $\bar{x} \in N(x, X)$.
- Se $X \cap N(x, X) = \emptyset$, então *não* há zero de f em X .
- Seja $x \subset \overset{\circ}{X}$ (interior de X). Assuma que $N(x, X)$ foi calculado através de eliminação Gaussiana ou Gauss-Seidel Intervalar. Se $N(x, X) \subset \overset{\circ}{X}$, então existe um *único* zero de f em X .

Poderíamos aplicar o método de Newton Intervalar para localizar todos os pontos em que $\nabla f(x) = 0$ em X^0 . Porém muitos destes pontos podem ser maximizadores ou pontos sela, e não minimizadores. O método de Newton Intervalar é aplicado a cada subcaixa X gerada pelo algoritmo BB. Se $X \subset X^0$, não foi descartado pelo teste de *limitante inferior*, passou pelo teste de *monotonicidade* e de *não-convexidade*, então aplicamos *uma iteração* do Método de Newton Intervalar sobre ∇f em X .

Ao realizar uma iteração de Newton Intervalar, se $N(x, X) \subset \overset{\circ}{X}$ está verificada a *existência* e *unicidade* de um zero de $\nabla f(x)$ em X . Como o intervalo X não foi barrado pelo teste de não convexidade e tem um único ponto estacionário, temos boas chances de tal ponto ser o minimizador global de f em X , e então podemos nos sentir encorajados a iniciar um algoritmo de busca local, [10], [11], na caixa X . Se tal algoritmo local convergiu a um ponto $\hat{x} \in X$ que cumpre as *condições suficientes de segunda ordem* então podemos descartar X por *otimalidade*. Por outro lado, se $N(x, X) \cap X = \emptyset$ então não existe ponto $x \in X$ no qual o gradiente se anula, portanto podemos descartar X .

- **Back-Boxing:** a idéia dessa estratégia, [7], é tirar proveito da eficiência dos métodos locais, [10], [11], de otimização, e após a localização de um minimizador local \bar{x} , determinar a maior região possível ao redor de \bar{x} , tal que \bar{x} seja o único minimizador nessa região.

Uma vez determinado um minimizador local \bar{x} , buscamos a maior caixa B_g ao redor de \bar{x} para qual $0 \notin \nabla f(B_g)$. Para isso é usada uma extensão intervalar natural de ∇f . Enquanto $0 \notin \nabla f(B_g)$ aumentamos B_g . Em seguida, buscamos a maior caixa B_h a partir de B_g , na qual $\nabla^2 f(x) > 0$ para todo $x \in B_h$. Para verificar se $\nabla^2 f(x) > 0$ para todo $x \in B_h$, verificamos se $\nabla^2 f(B_h)$ é diagonalmente dominante (no sentido intervalar) com elementos positivos na diagonal. Enquanto $\nabla^2 f(B_h)$ for diagonalmente dominante aumentamos B_h . Por fim, buscamos a maior caixa B_{hs} a partir de B_h , na qual \bar{x} seja o único ponto que anula o $\nabla f(x)$. Para tanto usamos o operador de Newton Intervalar $N(\bar{x}, B_{hs})$, e aumentamos B_{hs} enquanto $N(\bar{x}, B_{hs}) \subset B_{hs}$.

A essa caixa final chamaremos de B . Sabemos daí que \bar{x} é o único minimizador global de f em B , e portanto tal região não precisa mais ser explorada. A seguir, particionamos o espaço restante de maneira conveniente e continuamos com o processo de branch-and-bound.

4 Busca Local

O primeiro teste capaz de descartar uma caixa X é $f(X) > \bar{f}$. Quanto menor o valor de \bar{f} maior é a chance de uma caixa ser eliminada por esse critério. Além disso \bar{f} também é utilizado para eliminar toda ou partes da caixa X que não cumprem a desigualdade $f(x) \leq \bar{f}$.

Logo é de interesse melhorar o valor \bar{f} o quanto antes. Portanto a cada nova caixa X selecionada para processamento, avaliaremos $f(m(X))$ e se $f(m(X)) < \bar{f}$ atualizamos este valor. Porém seguindo a filosofia de que quanto menor \bar{f} melhor, sempre que ocorrer $f(m(X)) < \bar{f}$, não nos contentaremos apenas com o valor de f no ponto médio de X , e aplicaremos um método de busca local, [10], [11], a partir de $m(X)$.

Com isso esperamos melhorar o valor de \bar{f} quão logo possível, alcançando assim de forma mais rápida o minimizador global. Lembrando que uma vez localizado um minimizador local \bar{x} , podemos utilizar Back-Boxing para delimitar uma área na qual \bar{x} é o único minimizador global, eliminando tal região de X e subdividindo o espaço restante. Além disso, se ao aplicar o método de Newton intervalar constatarmos a unicidade de um zero de $\nabla f(x)$ em X , então novamente usamos um método local para localizar tal ponto estacionário.

5 Resultados Computacionais

A implementação de dois algoritmos branch-and-bound, BBIA1 e BBIA2, empregando as técnicas de análise intervalar descritas anteriormente, foi realizada em MATLAB. A diferença entre esses dois algoritmos é que o segundo emprega a técnica de Back-Boxing e o primeiro não.

Para o tratamento de intervalos e aritmética intervalar utilizamos o pacote INTLAB, [14].

Nos experimentos numéricos, aplicamos os algoritmos na resolução de 25 problemas teste extraídos da literatura, [1], [3], [5], [6],[9]. A formulação completa dos problemas pode ser encontrada em [4]. Nestes experimentos, consideramos que um problema foi resolvido se *todos* os seus minimizadores globais foram encontrados e, a otimalidade global verificada.

Na Tabela 1 os problemas serão apresentados por meio de abreviações. A Tabela 1 traz a dimensão de cada problema, o número de avaliações de função, gradiente, Hessiana, e o tempo necessário aos algoritmos para resolver tais problemas. A Tabela 1 apresenta também os resultados obtidos pelo algoritmo que denominamos INTGLOBAL, referente ao trabalho de Pál e Csendes, [13].

Para comparar os algoritmos utilizamos como ferramenta o *perfil de desempenho*, [2]. Como *medida de desempenho* usamos o tempo em segundos. A Figura 1 apresenta o perfil de desem-

penho para os três algoritmos testados. Verificamos que BBIA2 mostrou-se o algoritmo mais eficiente, resolvendo em menos tempo, 52% dos problemas. BBIA2 também foi o mais robusto dos algoritmos, pois resolveu a totalidade de problemas em um tempo limite menor.

	n	BBIA1				BBIA2				INTGLOBAL			
		FE	GE	HE	tempo(s)	FE	GE	HE	tempo(s)	FE	GE	HE	tempo(s)
BRA	2	67	56	16	0.81	88	51	18	1.08	210	147	11	2.97
BOO	2	54	33	4	0.42	78	29	7	0.56	49	33	2	0.38
RAST2	2	56	33	13	0.65	7	3	4	0.06	171	118	15	1.38
RAST5	5	496	300	125	15.62	13	3	4	0.12	2859	1849	169	26.25
MICH2	2	59	45	19	1.59	52	32	13	1.89	60	40	3	1.48
MICH5	5	540	361	161	58.18	545	364	165	59.83	1657	1128	44	96.22
GRIEW2	2	124	79	37	2.18	7	3	2	0.09	381	261	33	5.16
EASOM	2	106	85	21	3.21	84	55	17	2.64	89	62	7	1.11
THCB	2	84	70	26	1.11	77	63	26	0.99	303	211	19	4.3
SHCB	2	194	135	36	3.02	200	137	47	3.18	612	393	19	10.61
H3	3	160	90	23	4.99	191	103	31	6.37	168	123	1	5.95
H6	6	965	440	93	66.31	1789	691	84	105.41	976	710	20	61.63
S5	4	106	73	30	3.52	129	55	14	3.26	126	86	7	5.83
S7	4	112	78	30	4.18	232	100	24	7.21	121	78	6	7.48
S10	4	118	80	30	5.58	232	101	24	8.94	123	78	6	10.66
SHU	2	2578	1350	410	92.62	2559	1333	408	92.11	3098	2090	131	120.33
RB	2	119	81	28	1.41	119	82	29	0.99	142	94	9	1.02
L8	3	72	52	20	2.24	18	12	3	0.29	72	49	4	2.14
L9	4	94	66	26	3.92	22	14	3	0.43	107	71	5	4.11
L10	5	112	76	32	6.17	21	11	3	0.57	135	91	7	6.69
L11	8	171	111	50	16.85	29	13	3	1.16	217	146	9	16.55
L12	10	205	130	60	25.59	32	12	3	1.63	274	188	11	26.42
C5	5	96	63	24	4.74	95	63	25	4.61	606	406	8	25.36
C8	8	248	162	68	25.88	259	176	67	26.33	5043	3130	17	321.47
C10	10	422	274	123	68.26	435	287	122	68.64	21576	12853	48	1793.69

Tabela 1: Resultados para os algoritmos BBIA1, BBIA2 e INTGLOBAL

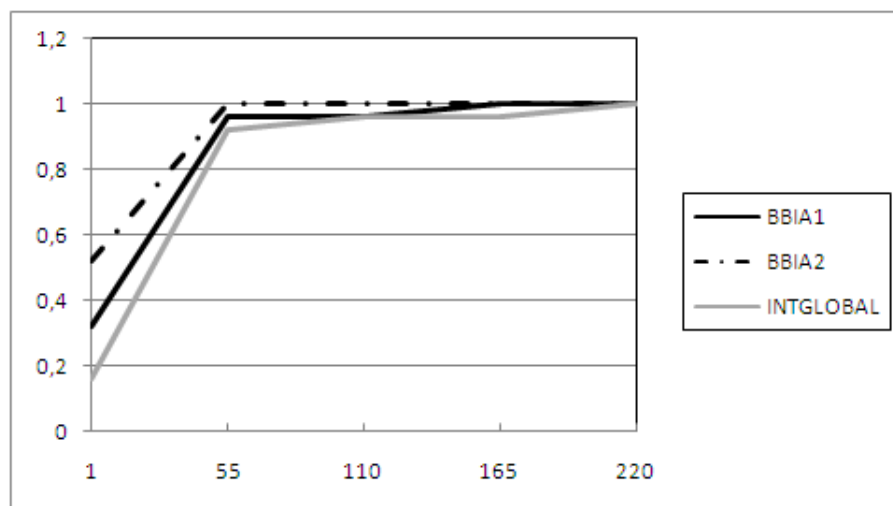


Figura 1: Perfil de Desempenho

6 Conclusões

Métodos branch-and-bound intervalares são métodos determinísticos para otimização global. As sucessivas partições do espaço de busca aliadas às técnicas de análise intervalar, possibilitam a tais métodos realizar uma busca completa, localizar os ótimos globais e verificar a otimalidade global.

Os algoritmos BBIA1 e BBIA2 mostraram-se robustos, já que resolveram todos os problemas teste. A superioridade de desempenho de BBIA2 em relação a BBIA1 se deve ao uso do processo

de Back-Boxing, que permite isolar os minimizadores locais, evitando que o algoritmo particione e analise pequenas regiões próximas a tais minimizadores, que acarreta um aumento no tempo de resolução.

O melhor desempenho de BBIA2 em relação a INTGLOBAL, se deve não apenas ao uso de Back-Boxing, mas também ao uso de métodos de busca local em momentos apropriados do processo de resolução, que contribuíram para um melhor desempenho de nossos algoritmos.

Referências

- [1] L.C.W. Dixon e G.P. Szegö, “Towards Global Optimization”, North-Holland, 1975.
- [2] E.D. Dolan e J.J. Moré, Benchmarking optimization software with performance profiles, *Mathematical Programming*, 91 (2002) 201–213.
- [3] C.A. Floudas e P.M. Pardalos, “A Collection of Test Problems for Constrained Global Optimization Algorithms”, Berlin, Springer-Verlag, 1990.
- [4] D.S. Gonçalves, “DIRECT, Análise Intervalar e Otimização Global Irrestrita”, Dissertação de Mestrado, IMECC, UNICAMP, 2009.
- [5] E.R. Hansen e G.W. Walster, “Global optimization using interval analysis”, 2nd Edition, M. Dekker, 2004.
- [6] R. Horst e H. Tuy, “Global optimization: deterministic approaches”, Springer-Verlag, 1993.
- [7] R. Van Iwaarden, “An improved unconstrained global optimization algorithm”, PhD Thesis, Department of Mathematics, University of Colorado at Denver, 1996.
- [8] R.B. Kearfott, “Rigorous Global Search: Continuous Problems”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [9] C. Lavor e N. Maculan, A function to test methods applied to global minimization of potential energy of molecules, *Numerical Algorithms*, 35 (2004) 287–300.
- [10] D.G. Luenberger, “Linear and Nonlinear Programming”, Springer, 2nd Edition, 2003.
- [11] J.M. Martínez e S.A. Santos, “Métodos Computacionais de Otimização”, IMPA, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 1995.
- [12] R.E. Moore, “Interval Analysis”. Englewood, Prentice-Hall, 1966.
- [13] L. Pál e T. Csendes, INTLAB implementation of an interval global optimization algorithm, *Optimization Methods and Software*, to appear.
- [14] S.M. Rump, INTLAB - INTerval LABoratory, em “Developments in Reliable Computing”, (T. Csendes ed.), pp. 77–104, Kluwer Academic Publishers, 1999.