

# Computando o primeiro par $(\lambda, u_\lambda)$ do $p$ -Laplaciano

Grey Ercole , Rodney Josué Biezuner,

Depto de Matemática, ICEX, UFMG,  
30161-970, Belo Horizonte, MG

E-mail: grey@mat.ufmg.br, rodney@mat.ufmg.br,

Eder Marinho Martins

DEMAT, ICEB, UFOP

Campus Universitário Morro do Cruzeiro

35400-000, Ouro Preto, MG

E-mail: eder@iceb.ufop.br

**Resumo:** *Apresentamos um método iterativo, baseado no método das potências inversas da Álgebra Linear, para computar o primeiro autovalor e a primeira autofunção positiva e normalizada do  $p$ -Laplaciano, com condições de Dirichlet homogêneas, em um domínio  $N$ -dimensional limitado,  $N \geq 2$ . Provamos que o método funciona para uma bola  $N$ -dimensional e fornecemos evidências numéricas de sua validade também para um quadrado bidimensional.*

**Palavras-chave:**  *$p$ -Laplaciano, primeiro autovalor, método das potências inversas*

## 1 Introdução

Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ ,  $\lambda_p(\Omega)$  o primeiro autovalor e  $u_{\lambda_p(\Omega)}$  a primeira autofunção positiva e normalizada ( $\|u_{\lambda_p(\Omega)}\|_\infty = 1$ ) do operador  $-\Delta_p$ ,  $p > 1$ , com condições de Dirichlet homogêneas. ( $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} |\nabla u|)$  é o  $p$ -Laplaciano.)

Certas propriedades de  $\lambda_p(\Omega)$  são bastante conhecidas: existência, positividade, simplicidade e a seguinte caracterização variacional como o mínimo dos quocientes  $\frac{\int_\Omega |\nabla v|^p dx}{\int_\Omega |v|^p dx}$  para  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ .

Se  $p = 2$ , caso em que  $\Delta_p$  se reduz ao Laplaciano  $\Delta$ , o valor de  $\lambda_p(\Omega)$  é bem conhecido para domínios de geometria simples como uma bola ou um quadrado. Entretanto, se  $p \neq 2$  e  $N \geq 2$  o valor de  $\lambda_p(\Omega)$  não é conhecido, nem mesmo para tais domínios<sup>1</sup>.

Na falta do valor exato para  $\lambda_p(\Omega)$ , estimativas sobre sua localização são de interesse na literatura, especialmente as cotas inferiores. (Cotas superiores são facilmente encontradas a partir da caracterização variacional de  $\lambda_p(\Omega)$ .)

Uma cota inferior bastante conhecida para  $\lambda_p(\Omega)$  é a seguinte:

$$\lambda_p(\Omega^*) \leq \lambda_p(\Omega) \tag{1}$$

em que  $\Omega^*$  é a bola centrada na origem e de mesmo volume que  $\Omega$ .

Nesse trabalho apresentamos um método, baseado em uma sequência de funções  $(\phi_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  construídas por processo iterativo, que desenvolvemos em [3] para obtenção do par  $(\lambda_p(\Omega), u_{\lambda_p(\Omega)})$ . Provamos que esse método funciona para o caso em que  $\Omega = B$ , uma bola

---

<sup>1</sup>No caso especial  $N = 1$  o valor de  $\lambda_p(\Omega)$  é explicitamente conhecido: se  $\Omega = (a, b)$ , então  $\lambda_p(\Omega) = \left(\frac{\pi_p}{b-a}\right)^{p-1}$  em que  $\pi_p := 2\sqrt[p]{p-1} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}}$ ,  $p > 1$ .

de  $\mathbb{R}^N$ . Esse resultado<sup>2</sup> é, portanto, relevante e certamente será útil em pesquisas envolvendo o  $p$ -Laplaciano que levam em conta a geometria esférica ou, em vista de (1), a localização de  $\lambda_p(\Omega)$ .

Os principais resultados que sustentam o método são válidos para domínios mais gerais e sugerem a sua aplicabilidade para alguma classe importante de domínios, ainda a ser definida.

Apresentamos, também, alguns resultados da implementação numérica do método para a bola unitária de  $\mathbb{R}^N$  e para o quadrado unitário bidimensional  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Os resultados numéricos que obtivemos para o quadrado reforçam nossa conjectura de que o método funciona para uma classe maior de domínios. Nesse sentido, também estabelecemos um resultado parcial que obtivemos, válido para regiões que possuem determinadas propriedades de simetria como o quadrado. Esse resultado, obtido como aplicação da técnica dos planos móveis, mostra, para tais regiões, que as funções  $\phi_n$  atingem seus valores máximos sempre num mesmo ponto (o centro). Na prova de que o método funciona para a bola esta propriedade foi decisiva.

## 2 Principais Resultados

Seja  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  a sequência definida recursivamente da seguinte forma:  $\phi_0 = 1$  e, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\phi_n$  é a única solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_n = \phi_{n-1}^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \phi_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

A partir de  $\{\phi_n\}$  definimos para  $n \geq 0$  as seguintes sequências de números reais

$$\gamma_n := \inf_{\Omega} \left( \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1}, \quad \Gamma_n := \sup_{\Omega} \left( \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_{L^\infty}^{p-1} \text{ e } \nu_n = \left( \frac{\|\phi_n\|_{L^p}}{\|\phi_{n+1}\|_{L^p}} \right)^{p-1}. \quad (3)$$

Aplicando o princípio da comparação provamos o seguinte.

**Teorema 1** *A sequência  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaz*

$$0 < \phi_{n+1} \leq \|\phi_1\|_{\infty} \phi_n \quad \text{em } \Omega$$

para todo  $n \geq 0$ . Portanto, a sequência  $(\gamma_n)$  está bem definida, uma vez que

$$\gamma_n := \inf_{\Omega} \left( \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} \geq \frac{1}{\|\phi_1\|_{\infty}^{p-1}}.$$

Agora, utilizando a identidade de Picone e o princípio da comparação provamos que a sequência  $(\gamma_n)$  é crescente e limitada superiormente por  $\lambda_p(\Omega)$ .

**Teorema 2** *Para todo  $n \geq 2$  valem as seguintes propriedades:*

- (i)  $\gamma_0 < \lambda_p$ .
- (ii)  $\gamma_0 \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} < \lambda_p$ .
- (iii) Existe  $\gamma := \lim \gamma_n$  e  $\gamma_0 \leq \gamma \leq \lambda_p$ .

Com relação a sequência  $(\Gamma_n)$  em (3), seus termos não estão, em princípio, bem definidos. De fato, como  $\phi_0 \equiv 1$  em  $\Omega$  e  $\phi_1 = 0$  sobre  $\partial\Omega$  temos que

$$\Gamma_0 = \left\| \frac{\phi_0}{\phi_1} \right\|_{\infty}^{p-1} = \infty.$$

Entretanto, temos o seguinte teorema.

<sup>2</sup>No caso  $p = 2$  prova-se a validade do método a partir da estrutura de  $H_0^1(\Omega)$  e das propriedades do operador Laplaciano (linearidade e simetria).

**Teorema 3** *Assuma que  $\Gamma_{n_0} < \infty$  para algum  $n_0 \geq 1$ . Então,*

$$\left( \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} \leq \Gamma_{n_0} \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

e, portanto,  $(\Gamma_n)$  está bem definida e é limitada para  $n \geq n_0$ . Além disso, a sequência  $(\Gamma_n)$  é decrescente para  $n \geq n_0$ .

Para o caso especial da bola  $B_R$  podemos garantir a existência de  $n_0$  tal que  $\Gamma_{n_0}$  é finito.

**Teorema 4** *Seja  $\Omega = B_R$  a bola de raio  $R$  centrada na origem. Então  $\Gamma_1$  é finito.*

**Prova.** Nesse caso, as soluções da equação (2) são radiais:  $\phi_n(x) = v_n(r)$  em que

$$v_n(r) = \int_r^R \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{N-1} v_{n-1}(s)^{p-1} ds \right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta. \quad (4)$$

Assim, se  $x \in \partial B_R$  da regra de L'Hôpital temos:

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)} = \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{v_1(r)}{v_2(r)} = \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{v_1'(r)}{v_2'(r)} = \left( \frac{\int_0^R s^{N-1} ds}{\int_0^R s^{N-1} v_1(s)^{p-1} ds} \right)^{\frac{1}{p-1}} < \infty.$$

Como  $\Gamma_n = \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_\infty$  temos que  $\Gamma_1 < \infty$ . ■

A sequência  $(\nu_n)$ , por sua vez, está bem definida pois  $\phi_n \in C_0^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Além disso, o teorema a seguir, cuja prova utiliza uma desigualdade de Hölder e a formulação fraca de soluções, garante que  $\nu_n$  é limitada superiormente por  $\Gamma_n$  e inferiormente por  $\lambda_p$ .

**Teorema 5** *Para todo  $n \geq 1$  temos que  $\lambda_p \leq \nu_n \leq \Gamma_n$ .*

**Corolário 6** *Se  $\lim \Gamma_n = \lambda_p$ , então  $\lim \nu_n = \lambda_p$ .*

### 3 Conjectura

Os resultados da seção anterior asseguram a existência dos limites

$$\gamma := \lim \gamma_n \text{ e } \Gamma := \lim \Gamma_n.$$

Portanto, caso exista  $\nu := \lim \nu_n$ , temos a seguinte localização de  $\lambda_p$ :  $\gamma \leq \lambda_p \leq \nu \leq \Gamma$ .

No intuito de tentar encontrar uma sequência de funções que converge para a primeira autofunção de  $-\Delta_p$ , definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$  a seguinte função

$$u_n := \frac{\phi_n}{a_n}, \quad (5)$$

em que  $a_n$  é escolhido de modo que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \gamma_n^{\frac{1}{p-1}} = \inf_{\Omega} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}.$$

Por exemplo, se definimos

$$a_1 := \|\phi_1\|_\infty,$$

então

$$a_n = \frac{\|\phi_1\|_\infty}{\inf_{\Omega} \frac{\phi_1}{\phi_2}} \frac{1}{\inf_{\Omega} \frac{\phi_2}{\phi_3}} \dots \frac{1}{\inf_{\Omega} \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}}. \quad (6)$$

Assim, uma vez que

$$\frac{\|\phi_k\|_\infty}{\|\phi_{k-1}\|_\infty} \leq \left\| \frac{\phi_k}{\phi_{k-1}} \right\|_\infty$$

temos a seguinte desigualdade para  $a_n$ :

$$a_n \geq \|\phi_1\|_\infty \frac{\|\phi_2\|_\infty}{\|\phi_1\|_\infty} \frac{\|\phi_3\|_\infty}{\|\phi_2\|_\infty} \dots \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n-1}\|_\infty} = \|\phi_n\|_\infty.$$

Daí e da definição de  $u_n$  segue que

$$0 \leq u_n \leq \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} \leq 1.$$

Além disso, a sequência  $\{u_n\}$  é convergente como mostra o teorema a seguir.

**Teorema 7** *Seja  $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  a sequência de funções definida acima. Então  $\{u_n\}$  é decrescente e satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{n+1} = \gamma_n u_n^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso,  $\{u_n\}$  converge uniformemente para uma função  $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \gamma u^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que o teorema acima não nos permite afirmar que  $u = \lim u_n \neq 0$ . Somente por este motivo não podemos concluir que  $u = u_{\lambda_p(\Omega)}$  e que  $\gamma = \lambda_p(\Omega)$ .

Conjecturamos que para alguma classe importante de domínios

$$\lambda_p = \gamma = \Gamma = \nu \tag{7}$$

e que a função  $u$  do teorema acima é a primeira autofunção  $u_{\lambda_p(\Omega)}$ .

Assim, uma maneira de se garantir a validade desta última parte da conjectura é provar que  $u$  não é identicamente nula em  $\bar{\Omega}$ . Veremos, na próxima seção, que isto é o que realmente ocorre quando  $\Omega = B_R$ , uma bola de raio  $R > 0$ , e que, para esta região vale (7).

## 4 O caso $\Omega = B_R$

O principal resultado que apresentamos (veja [3]) é o seguinte:

**Teorema 8** *Se  $\Omega$  é uma bola  $N$  dimensional,  $N \geq 2$ , ou se  $p = 2$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lambda_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n$$

e, conseqüentemente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lambda_p$ .

Além disso,

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} \rightarrow u_{\lambda_p}$$

uniformemente.

Apresentaremos mais adiante a prova para o caso em que  $\Omega = B_R$ . A prova para o caso  $p = 2$  pode ser vista em [3].

**Lema 9** (veja [1]) Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas sobre  $[a, b]$  e diferenciáveis em  $(a, b)$ . Suponha que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Se  $\frac{f'}{g'}$  é crescente (decrecente), então também são crescentes (decrecentes) as seguintes funções

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \text{ e } \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}.$$

Utilizando o Lema 9 obtemos:

**Teorema 10** Seja  $\phi_0 \equiv 1$  e, para  $n \geq 1$ , seja

$$\phi_n(r) = \int_r^R \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{N-1} \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Então, a função  $\phi_n$  é estritamente decrescente e para cada  $n \geq 0$  o quociente  $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$  é estritamente crescente em  $[0, R]$ .

**Corolário 11**  $\gamma_n = \inf_B \left( \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \left( \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} \right)^{p-1}$ .

**Prova.** Como  $\phi_n$  e  $\phi_{n+1}$  são funções radiais decrescentes, temos  $\|\phi_n\|_\infty = \phi_n(0)$  and  $\|\phi_{n+1}\|_\infty = \phi_{n+1}(0)$ . Do Teorema anterior segue  $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$  é decrescente e daí que

$$\inf_B \left( \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \left( \frac{\phi_n(0)}{\phi_{n+1}(0)} \right)^{p-1} = \left( \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} \right)^{p-1}.$$

■

Como consequência do corolário anterior e de (6) obtemos

$$a_n = \frac{\|\phi_1\|_\infty}{\inf_\Omega \frac{\phi_1}{\phi_2}} \frac{1}{\inf_\Omega \frac{\phi_2}{\phi_3}} \dots \frac{1}{\inf_\Omega \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}} = \frac{\|\phi_1\|_\infty}{\|\phi_2\|_\infty} \frac{1}{\|\phi_3\|_\infty} \dots \frac{1}{\|\phi_n\|_\infty} = \|\phi_n\|_\infty.$$

Logo, para a bola  $B_R$  a função  $u_n$  definida por (5) tem a forma  $u_n = \frac{\phi_n}{\|a_n\|_\infty} = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}$  e, assim,  $\|u_n\|_\infty = 1$ .

Segue do Teorema 7 que  $u_n \rightarrow u$ , uniformemente, com  $\|u\|_\infty = 1$ . Concluimos, então, que

$$u = u_{\lambda_p(B_R)} \quad \text{e} \quad \gamma = \lim \gamma_n = \lambda_p(\Omega).$$

Também mostramos em [3] o seguinte resultado:

**Teorema 12**  $\lim \Gamma_n = \lambda_p$  e, conseqüentemente,  $\lim \nu_n = \lambda_p$ .

## 5 Resultados Numéricos:

Nesta seção apresentamos alguns resultados numéricos que obtivemos para a bola unitária de  $\mathbb{R}^N$  e para o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

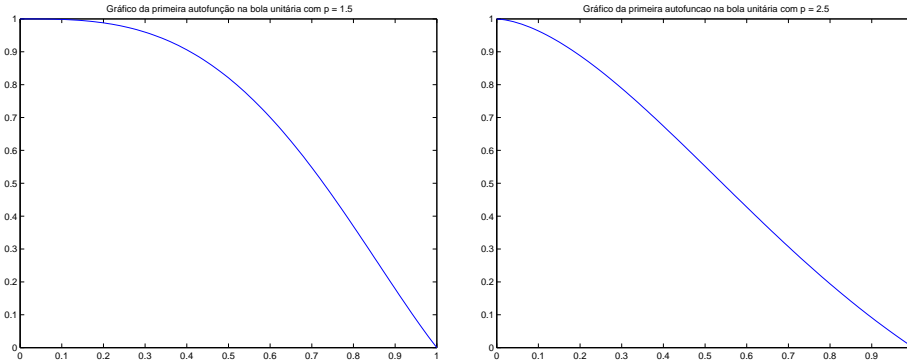
## 5.1 A bola unitária

Para computar as integrais em (4) e os valores de  $\nu_n$  na bola unitária, combinamos as regras de Simpson Composta e do Trapézio Composto. Na Tabela 1 apresentamos os valores encontrados para as aproximações  $\nu_n$  do primeiro autovalor do  $p$ -laplaciano, para valores de  $p$  variando entre 1.1 e 4.0 e para dimensões  $N = 2, 3, 4$ .

**Tabela 1: Primeiro autovalor para o  $p$ -Laplaciano na bola unitária**

$p$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$p$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
1.1	2.5694	3.8728	5.1871	2.6	8.1192	15.0590	24.0121
1.2	2.9656	4.5151	6.1020	2.7	8.5355	16.0412	25.8617
1.3	3.3263	5.1283	7.0064	2.8	8.9598	17.0586	27.8027
1.4	3.6741	5.7431	7.9390	2.9	9.3921	18.1117	29.8374
1.5	4.0180	6.3717	8.9154	3.0	9.8324	19.2013	31.9687
1.6	4.3624	7.0201	9.9443	3.1	10.2809	20.3278	34.1991
1.7	4.7098	7.6920	11.0314	3.2	10.7375	21.4917	36.5314
1.8	5.0619	8.3898	12.1810	3.3	11.2022	22.6937	38.9681
1.9	5.4195	9.1153	13.3969	3.4	11.6751	23.9341	41.5120
2.0	5.7835	9.8698	14.6822	3.5	12.1561	25.2136	44.1659
2.1	6.1543	10.6545	16.0400	3.6	12.6453	26.5327	46.9325
2.2	6.5321	11.4701	17.4730	3.7	13.1427	27.8919	49.8144
2.3	6.9174	12.3177	18.9841	3.8	13.6482	29.2916	52.8146
2.4	7.3103	13.1979	20.5759	3.9	14.1619	30.7325	55.9359
2.5	7.7108	14.1115	22.2510	4.0	14.6838	32.2150	59.1810

Abaixo ilustramos os gráficos das autofunções para  $p = 1.5$  e  $p = 2.5$  com  $r = |x| \in [0, 1]$



## 5.2 O quadrado unitário

Antes de apresentar os resultados numéricos sobre o quadrado, gostaríamos de enfatizar que a propriedade

$$\inf_{\Omega} \left( \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \left( \frac{\|\phi_n\|_{\infty}}{\|\phi_{n+1}\|_{\infty}} \right)^{p-1}, \quad (8)$$

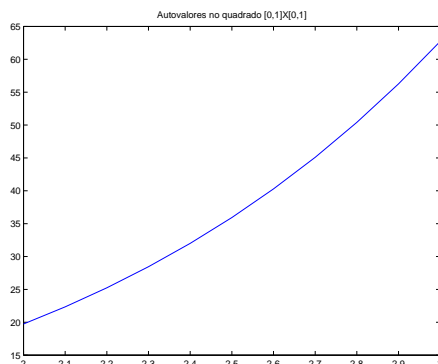
verificada para  $\Omega = B_R$ , foi essencial na prova de nossa conjectura para o caso da bola. Assumindo a unicidade dos pontos de máximo de cada função  $\phi_n$  juntamente com o fato de eles sempre ocorrem no interior de  $\Omega$  é possível mostrar que uma condição necessária para (8) é que as funções  $\phi_n$  atinjam seus respectivos máximos num mesmo ponto. Para o quadrado, utilizando o método dos planos móveis, conseguimos provar que o máximo de cada  $\phi_n$  é atingido no centro. Esta é mais uma evidência de que nossa conjectura é válida para o quadrado. Esse resultado pode ser estendido a outras regiões que tenham as mesmas simetrias do quadrado e, portanto, acreditamos que a conjectura também seja válida para estas regiões.

Para resolver as equações (2) no quadrado unitário  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  utilizamos um algoritmo proposto em [2]. Na Tabela 2 apresentamos os valores que obtivemos para as três sequências  $\gamma_n, \Gamma_n$  e  $\nu_n$  com 5 iterações, para  $p$  variando de 2 até 3 com um espaçamento de 0.1. Observamos na tabela que a sequência  $(\nu_n)$  possui convergência mais rápida e erro menor, especialmente para valores maiores de  $p$ . Sabemos que o primeiro autovalor para o Laplaciano ( $p = 2$ ) no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  é  $2\pi^2 = 19,7392$ , o que significa que o erro em  $\nu_5$  está em torno de 0.02%. Esse resultado, com apenas 5 iterações, aparenta ser melhor que o obtido em [4], em que o erro foi 3%.

**Tabela 2: Primeiro autovalor para o  $p$ -Laplaciano no quadrado unitário**

$p$	$\gamma_5$	$\nu_5$	$\Gamma_5$
2.0	19.7145	19.7348	19.9270
2.1	22.3239	22.3460	22.4447
2.2	25.2168	25.2412	25.3343
2.3	28.2413	28.4495	28.6139
2.4	31.9750	32.0024	32.5685
2.5	35.5746	35.9344	37.6961
2.6	38.5547	40.2827	40.8167
2.7	41.4917	45.0890	52.8657
2.8	5.5593	50.3972	642.6432
2.9	7.8823	56.2567	670.7254
3.0	14.6719	62.7208	205.0535

A seguir apresentamos o gráfico  $p \times \nu_5$



## Referências

- [1] G. D. Anderson, M.K. Vamanamurthy, M. Vuorinen, Inequalities for quasiconformal mappings in space, *Pacific J. Math.* 160 (1993) 1-18.
- [2] B. Andreianov, F. Boyer, F. Hubert, Finite volume schemes for the  $p$ -Laplacian on cartesian meshes, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38 (2004) 931-959.
- [3] R. J. Biezuner, G. Ercole and E. M. Martins, Computing the first eigenvalue of the  $p$ -Laplacian via the inverse power method, *Journal of Functional Analysis*, a aparecer.
- [4] L. Lefton, D. Wei Numerical approximation of the first eigenpair of the  $p$ -Laplacian using finite elements and the penalty method, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 18 (1997) 389-399.