

Modelagem de Problemas Difusivos-Advectivos Darcyianos através do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade

Carlos Friedrich Loeffler

UFES - Departamento de Engenharia Mecânica
29075910 - Campus Goiabeiras - Vitória - ES
Email: carlosloeffler@bol.com.br

Felipe Patrício das Neves

CBMES - Centro de Ensino e Instrução de Bombeiros
29168033 - Serra - ES
Email: patriciofire@gmail.com

Paulo César Oliveira

UFES - Departamento de Engenharia Rural
29500000 - Centro Agropecuário - Alegre - ES
Email: pacololiveira@yahoo.com.br

***Resumo:** Neste trabalho é desenvolvido um modelo numérico para simular computacionalmente a distribuição de pressões, velocidades, temperaturas e fluxos de calor estacionários em volumes de controle bidimensionais governados pela equação da Difusão-Advecção, através da formulação com Dupla Reciprocidade do Método dos Elementos de Contorno. Admite-se a lei de Darcy para associar pressão e velocidade, resultando num modelo matemático dado pela Equação de Laplace. Os resultados da solução desse problema são então implementados no modelo difusivo-advectivo, gerando temperaturas e fluxos de calor.*

Palavras-chave: Difusão-Adveccção, Método dos Elementos de Contorno.

Introdução

São muito freqüentes na engenharia industrial problemas físicos que envolvem transporte de massa ou energia através de difusão (propagação no meio contínuo) associada à advecção (transporte por meio de fluxo), seja em escoamentos, misturas ou deslocamento de partículas. Comumente, tal associação entre essas duas formas de transmissão de calor nessas condições recebe a denominação de convecção forçada. Os casos mais comuns e conhecidos consistem na transferência de calor junto à camada limite do fluido em escoamentos laminares, típico em aletas de trocadores de calor e em aerofólios, e do transporte de fluidos incompressíveis com baixa viscosidade em tubulações sujeitas a diferenciais de temperatura. No entanto, existem situações menos tradicionais, mas não menos importantes, como a dispersão superficial de poluentes ou misturas em meio aquosos homogêneos, a secagem de produtos agrícolas, a absorção de líquidos em região não saturada ou extração do mesmo em meio poroso, este último problema atualmente de grande interesse na indústria de extração de petróleo. Outro caso especialmente interessante consiste dos problemas de aeração em ambientes fechados, onde o conhecimento das regiões de estagnação e os principais pontos de insuflamento são vitais para o combate aos incêndios.

No caso geral, à complexidade dos fenômenos físicos associados a esses problemas corresponde uma modelagem matemática igualmente elaborada, composta por equações diferenciais parciais não-lineares, que requerem necessariamente o emprego de métodos numéricos para sua solução aproximada. Por outro lado, particularmente na engenharia, na física e na matemática aplicada, o tratamento geral desses casos usualmente é substituído pela adoção de modelos simplificados, que viabilizem sua solução e ao mesmo tempo atendem às

necessidades práticas. Isso é feito de acordo com o estabelecimento de pertinentes hipóteses simplificadoras tanto nos aspectos físicos quanto geométricos. Nesse trabalho, especificamente, desenvolve-se um modelo numérico linear simplificado baseado para simular computacionalmente a distribuição do potencial e trajetórias de linhas de fluxo em volumes de controle bidimensionais governados por equações que conjugam os efeitos da difusão e da advecção, cuja solução completa é viabilizada através do emprego do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Equações Básicas de Governo

O domínio físico, portanto, compõe-se de um volume de controle bidimensional $\Omega(x,y)$, dentro do qual atua um campo de velocidades e pressões e em cujas fronteiras $\Gamma(x,y)$ são prescritas temperaturas (condições essenciais) ou fluxos (condições naturais). A figura 1 ilustra tais características.

Assim sendo, considerando-se escoamentos incompressíveis homogêneos, em regime permanente e com propriedades isotrópicas, a Equação da Continuidade [3] expressa-se por:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Na equação anterior v_x e v_y são componentes do vetor velocidade \vec{V} do escoamento, enquanto x e y caracterizam as coordenadas globais do volume de controle. Não obstante o regime do escoamento ser permanente, há um relacionamento entre as propriedades locais das variáveis de cada partícula em movimento com o sistema global de referência, de modo que as derivadas totais da velocidade com relação ao tempo são dadas por:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v_y \quad (2)$$

O mesmo ocorre com relação à temperatura T , de forma que:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y \quad (3)$$

Assim sendo, a Equação do Momentum [7], admitindo-se ausência de forças de corpo, escreve-se como:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v_y \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (4)$$

Onde ρ é a massa específica, p é o campo de pressão no fluido e μ é a viscosidade. Por sua vez, considerando-se ausência de forças de corpo, a Equação da Energia [7] escreve-se como:

$$\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y \right] = K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

Onde C_v é o calor específico a volume constante e K é a condutividade térmica do meio fluido. Nesta última expressão, o lado esquerdo representa a parcela de energia advectiva e o lado direito expressa a porção de energia difusiva e, por essa razão, tal fórmula é conhecida como Equação da Difusão-Advecção. No conjunto, as equações (1), (4) e (5) compõem as equações de governo do problema.

Modelo Darcyano da Equação de Momentum

A equação do Momentum toma formas simplificadas importantes na descrição de alguns fenômenos de indiscutível interesse prático. No caso da convecção em meios porosos, desde

que se admita que a porosidade seja relativamente baixa no meio, vigora a denominada Lei de Darcy [5], de forma que as componentes de velocidade são dadas como função exclusiva do campo de pressões, ou seja:

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

$$v_y = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7)$$

Tais equações também se aplicam ao estudo de secagem em cereais e outras materiais orgânicos granulados. Nessas condições, substituindo-se as equações (6) e (7) na equação da continuidade (1) obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{K}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (8)$$

Ou seja, o campo de pressão é harmônico e estando o problema bem posto também na fronteira do volume de controle, pode ser resolvido e gerar o campo de pressões e velocidades em qualquer ponto do domínio.

De acordo com esse modelo, as temperaturas são determinadas através da equação de energia (5) diretamente, pois o campo de velocidades do escoamento já está definido.

Formulação do MEC na Equação de Laplace

Considerando o modelo Darcyano, o problema é governado por duas equações diferenciais parciais, equações (5) e (8), que correspondem respectivamente a Equação da Difusão-Advecção e Equação de Laplace. Considerando esta última, a formulação direta do MEC é bem conhecida [1] e pode ser resumida conforme se segue.

O ponto de partida para a abordagem pelo MEC consiste do estabelecimento da equação de governo (1) numa forma integral, usando-se $u^*(\xi; x, y)$ como função auxiliar, resultando na seguinte expressão, na qual foram omitidos os argumentos por simplicidade:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] u^* \, d\Omega = 0 \quad (9)$$

Por ser um operador auto-adjunto, o Laplaciano permite a aplicação do esquema de integração por partes duas vezes na equação anterior, de modo que se pode reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] u^* \, d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right] p \, d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x} p \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u^*}{\partial y} p \right] \right\} d\Omega + \\ &\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial p}{\partial x} u^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial p}{\partial y} u^* \right] \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência na segunda e terceira parcelas do lado direito da equação (10) chega-se a:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] u^* \, d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right] p \, d\Omega - \int_{\Gamma} \{ p q^* \} d\Gamma + \int_{\Gamma} \{ v u^* \} d\Gamma \quad (11)$$

Onde:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad (12)$$

$$v = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (13)$$

A função auxiliar $u^*(\xi; x, y)$ é denominada solução fundamental tradicional, que é a solução de um problema correlato pela Equação de Poisson, onde uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto fonte ξ de um domínio espacial infinito. A equação de governo nessas condições de simetria angular é expresso por:

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} = -\Delta(\xi; r) \quad (14)$$

Onde $\Delta(\xi; r)$ é a função Delta de Dirac, singular em $r = \xi$. Uma solução particular da equação (14) é dada por:

$$u^*(\xi; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; x, y)] \quad (15)$$

Daí resulta:

$$q^*(\xi; x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r(\xi; r)} \quad (16)$$

Devido às propriedades da função Delta de Dirac, a substituição da equação (15) no primeiro termo do lado direito da equação (11) permite transformar a equação integral de domínio original em uma única expressão constituída de integrais de contorno e uma função de ponto, na forma:

$$C(\xi)p(\xi) + \int_{\Gamma} \{pq^*\}d\Gamma - \int_{\Gamma} \{vu^*\}d\Gamma = 0 \quad (17)$$

O coeficiente $C(\xi)$ está ligado ao posicionamento do ponto fonte ξ com relação ao domínio físico $\Omega(x, y)$. Para contornos suaves, se o ponto fonte se situa sobre o contorno, $C(\xi)=0,5$.

Formulação do MEC na Equação da Difusão-Advecção

Existem formulações outras do MEC para o tratamento de problemas difusivos-advectivos. Na mais tradicional delas a solução fundamental é a solução de um problema convectivo correlato, no qual uma fonte concentrada é aplicada num meio infinito onde um campo de velocidades interage com o meio difusivo. Esta solução fundamental é mais complexa e o modelo resultante, embora matematicamente mais elegante, não pode ser aplicado a campos de velocidade variáveis. Neste trabalho foi escolhida a formulação do MEC com Dupla-Reciprocidade [4] para o tratamento da equação da energia, pois além de não impor restrições ao campo de velocidades, aproveita-se a simplicidade matemática da formulação difusiva para se resolver o termo advectivo, conforme procedimento exposto a seguir.

Inicialmente, multiplica-se ambos os termos da equação (5) pela solução fundamental difusiva u^* e integra-se o resultado por todo o volume de controle $\Omega(x, y)$:

$$K \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) u^* d\Omega = \rho C_v \int_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) u^* d\Omega \quad (18)$$

Vê-se que no lado esquerdo da equação (18) figura o mesmo operador Laplaciano, auto-adjunto, que permite a aplicação dos mesmos procedimentos anteriormente apresentados para

expressar a formulação integral do MEC exclusivamente em termos de valores de contorno. Dessa forma, toda a atenção será dada agora ao lado direito da equação (18). De acordo com a FDR, admite-se inicialmente que o termo advectivo seja considerado tal como uma ação de domínio $b(x,y)$, ou seja:

$$K \int_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) u^* d\Omega = \rho C_v \int_{\Omega} b(x,y) u^* d\Omega \quad (19)$$

Considera-se então que a função $b(x,y)$ pode ser representada por uma combinação linear de funções interpolantes F_j arbitrárias, funções essas que possuem primitivas tais que:

$$b(x,y) \approx \alpha^j F^j(x,y) = \alpha^j \Psi_{,ii}^j(x,y) \quad (20)$$

A escolha dessas funções interpolantes F_j é conteúdo de muitas pesquisas, mas a classe de funções mais flexível é a das funções radiais de base, devido à sua flexibilidade, invariância, entre outras propriedades. Dentre essas, a mais comum é radial simples, dada pela distância euclidiana entre pontos do contorno X e pontos interpolantes X_j , isto é:

$$F^j(X; X_j) = R(X; X_j) = [(x - x^j)^2 + (y - y^j)^2]^{1/2} \quad (21)$$

Assim, a substituição da equação (20) no lado direito da equação (19) permite sejam reaplicadas as mesmas transformações matemáticas que conduziram à parcela difusiva a ser representada unicamente em termos de valores de contorno, ou seja:

$$\int_{\Omega} b u^* d\Omega = \alpha^j \left\{ C(\xi) \Psi^j(\xi) + \int_{\Gamma} [\Psi^j(X^j; X) u^*(\xi; X) - N^j(X^j; X) u^*(\xi; X)] d\Gamma \right\} \quad (22)$$

Sendo N_j é a derivada normal do potencial ψ_j , ou seja:

$$N^j = \frac{\partial \Psi^j}{\partial n} \quad (23)$$

Discretização e Formação das Equações Matriciais

O procedimento de discretização com o método dos elementos de contorno é bastante conhecido e muito simples. Divide-se o contorno $\Gamma(x)$ em N elementos discretos, nos quais a variável básica e derivada normal e a forma geométrica dos elementos, todos são aproximados por funções típicas de interpolação. No caso da FDR, também as funções auxiliares de interpolação são aproximadas ao longo dos elementos de contorno. No caso da Equação de Laplace, a equação (24) pode ser escrita para cada elemento de contorno, ou seja, toma-se o ponto fonte coincidente com os pontos nodais dos elementos, gerando um conjunto de equações que, na forma matricial, escreve-se como:

$$[H] [p] - [G] [v] = 0 \quad (24)$$

No caso da Equação da Difusão-Advecção, o procedimento é similar, mas mais elaborado, pois a equação resultante não é homogênea:

$$HT - Gq = \frac{\rho C_v}{K} \{H\Psi - GN\} \alpha = P \quad (25)$$

Escolhendo-se um número de funções F^j igual ao número de nós de discretização, os coeficientes α podem ser substituídos e escritos em termos dos valores nodais de $b(x,y)$, que por sua vez dependem das velocidades e das derivadas da temperatura. Assim sendo:

$$P = [H\Psi - GN] F^{-1} V_i T_{,i} \quad (26)$$

As derivadas da temperatura T podem ser eliminadas através de uma simples interpolação;

$$T = F\beta \rightarrow T_{,i} = F_{,i} F^{-1}T \quad (27)$$

A expressão final fica:

$$HT - Gq = [H\Psi - GN]F^{-1}V_i F_{,i} F^{-1}T = RT \quad (28)$$

Ressalta-se que o campo de velocidades deve ser completamente conhecido nas fronteiras do volume de controle; considerando que a equação (24) fornece apenas os valores das velocidades normais, as demais componentes precisam ser calculadas, o que é feito empregando-se a equação integral hiper-singular do MEC [6], que para contornos suaves é dada por:

$$\frac{1}{2}v_{\text{tang}}(\xi) = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} v^e \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial x_i(\xi)} d\Gamma - \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} [p^e - p(\xi)] \frac{\partial q^*(\xi; X)}{\partial x_i(\xi)} d\Gamma \quad (29)$$

Aplicação

O exemplo escolhido corresponde a um silo vertical, onde se faz a simulação numérica do campo de pressão e temperaturas em seu contorno, vide figura 1:

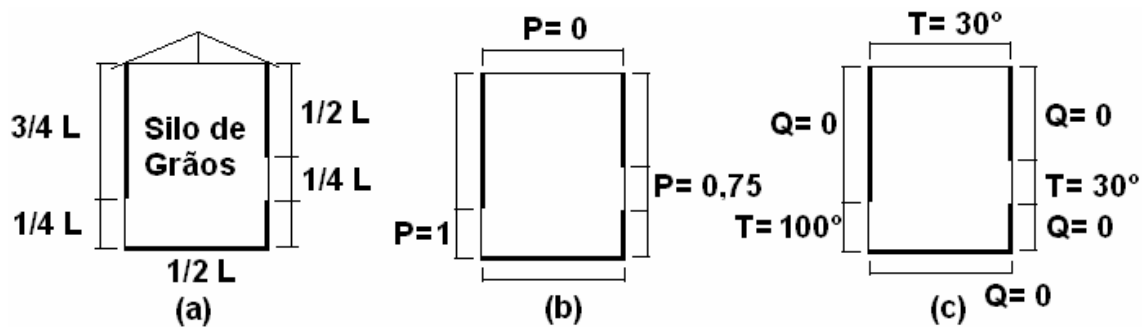


Figura 1: (a) características geométricas; (b) condições de contorno do problema de pressão; (c) condições de contorno do problema térmico.

Considerando o modelo de Darcy, o problema é linear e resolvido em duas etapas distintas, embora correlacionadas, nas quais resolve-se o campo de velocidades e depois determina-se a distribuição de temperaturas e fluxos. Na figura 2 são mostradas as curvas de pressão na parede vertical direita e velocidade tangencial na parede horizontal inferior. Na figura 3 são apresentadas as curvas de temperatura nas paredes vertical direita e vertical esquerda.

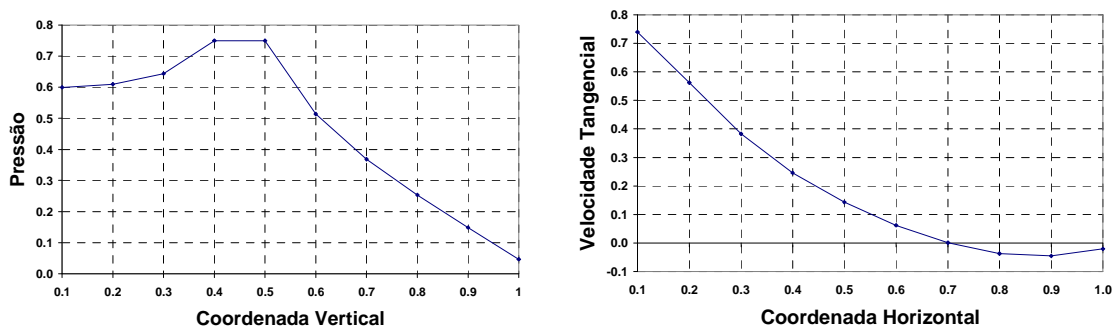


Figura 2 - Gráfico à esquerda: distribuição de pressão na parede vertical direita; gráfico à direita: distribuição das velocidades tangenciais ao longo da parede horizontal inferior.

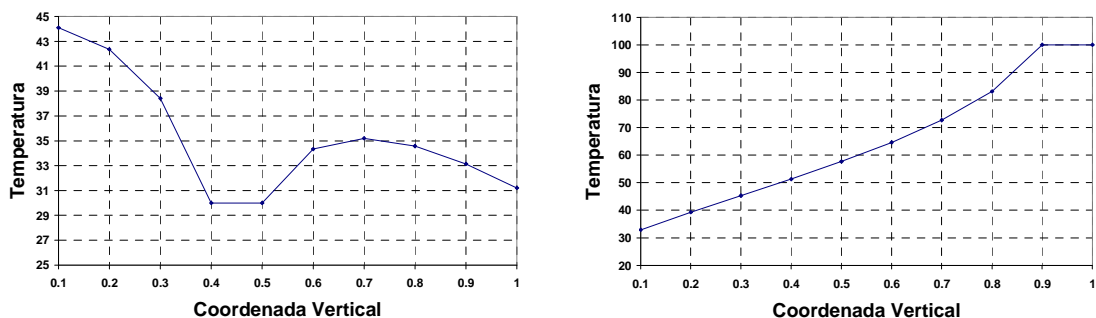


Figura 3- Gráfico à esquerda: distribuição da temperatura ao longo da parede vertical direita; gráfico à direita: distribuição da temperatura ao longo da parede vertical esquerda.

Conclusões

Para os valores de velocidade de escoamento do fluido considerados, compatíveis com vários problemas práticos de grande importância na área de secagem e ventilação natural, em que os fenômenos difusivo e convectivo atuam de maneira equânime, os resultados numéricos obtidos com o Método dos Elementos de Contorno foram muito bons, concordando com os valores obtidos na referência 2, com diferenças menores do que 1%. Destacam-se também o tempo computacional reduzido e a facilidade de introdução de dados e transporte desses do problema difusivo para o difusivo-advectivo, no caso das velocidades normais e tangenciais.

Referências

1. C.A. Brebbia, "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London, 1978.
2. O.C. Oliveira, C.F. Loeffler, A. Bulcão, Esquema Flux-spline Aplicado a Problemas Difusivos, Anais do XX CILAMCE, São Paulo, 1999.
3. M.N. Ozisik, "Transferência de Calor". Editora Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1990.
4. P.W. Partridge, C.A. Brebbia, L.C. Wrobel, "The Dual Reciprocity, Boundary Element Method", Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.
5. P.A. Ramachandran, "Boundary Element Methods in Transport Phenomena". Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science, London, 1994.
6. J.C.F. Telles, A.A. Prado, Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems, Chap 6 of Advanced Formulations in Boundary Element Methods, Elsevier, London (1993).
7. F.M.White, "Fluid Mechanics", McGraw-Hill Int., Singapore, 1986.