 ISSN 1984-820X

Estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy e a função de Lyapunov

Laécio C. Barros
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, UNICAMP,
13083-970, Campinas, SP
E-mail: laeciocb@ime.unicamp.br

Maria Beatriz F. Leite
Faculdade de Matemática - CEATEC- PUC
13.086-900, Campinas, SP.
E-mail: bialeite@puc-campinas.edu.br

Renata Zotin G. de Oliveira
Universidade Estadual Paulista - Departamento de Matemática - UNESP
13500-230, Bairro Bela Vista, Rio Claro, SP.
E-mail: rzotin@rc.unesp.br

Rodney Carlos Bassanezi
Departamento de Matemática - Universidade Federal do ABC - UFABC
09210-170, Santo André, SP.
E-mail: rodney.bassanezi@ufabc.edu.br

Resumo: *Neste trabalho aplicamos a metodologia de controladores fuzzy, do tipo Mamdani, para descrever a dinâmica de sistemas evolutivos parcialmente conhecidos. Estados de equilíbrios são estudados a partir da base de regras e a estabilidade é investigada usando o método direto de Lyapunov. Finalmente, um modelo epidemiológico do tipo SIS é estudado a partir da metodologia proposta.*

Palavras-chave: *sistemas fuzzy, ponto de equilíbrio, função de Lyapunov.*

1 Introdução

Modelos clássicos de Dinâmica Populacional e/ou Epidemiologia, em geral, são dados por um sistema de equações diferenciais. Neste caso, os parâmetros dos modelos são frequentemente tomados como valores médios obtidos a partir de um conjunto de dados, de tal maneira que o modelo passa a ser deterministicamente conhecido. No entanto, admitindo-se incerteza devido ao conhecimento parcial, o que é comum em fenômenos biológicos [7], uma alternativa é modelar tal conhecimento a partir de um conjunto de regras da forma *se-então*. Mais diretamente falando, o comum é adotar uma equação

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{1}$$

para representar o sistema dinâmico, onde o campo f representa a variação, a partir da qual a evolução do sistema é estudada. A questão que se coloca é: como podemos analisar o sistema (1) se o mesmo for parcialmente conhecido? A idéia é adotar um modelo linguístico capaz de captar as informações disponíveis do modelo, via de regra, junto a um especialista. Em Barros e

Bassanezi [2] e Dias [3] é proposta uma metodologia para estimar soluções de equações diferenciais utilizando controladores fuzzy [6], na qual as variáveis de estado são as entradas e as saídas, são as variações do estado. Como estamos diante de um sistema dinâmico, ainda que parcialmente conhecido, é natural investigarmos a existência de equilíbrios bem como estabilidade dos mesmos.

2 Equilíbrio e estabilidade de sistemas baseados em regras

O conceito de equilíbrio de um sistema baseado em regras é o mesmo de equações diferenciais, isto é, estados cuja variação é nula. Porém, neste caso, a investigação de tal equilíbrio é realizada a partir da base de regras.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de pontos de equilíbrio é que haja mudança de sinal nos consequentes de uma base de regras ordenada, cujas funções de pertinência são contínuas [10].

O estudo de estabilidade do equilíbrio será realizado pelo método direto de Lyapunov, o qual se utiliza de uma função $V(x)$ positiva definida, numa vizinhança U do equilíbrio $\overline{x}$. Tal método diz que, num equilíbrio $\overline{x}$ devemos ter $V(\overline{x}) = 0$, $V(x) > 0$ para x em $U - \{\overline{x}\}$ (Hale [4]). Assim,

- se $V'(x) < 0$ em $U - \{\overline{x}\}$, então o equilíbrio é assintoticamente estável.
- se $V'(x) > 0$ em $U - \{\overline{x}\}$, o equilíbrio será instável.

Em [8] também é utilizada a função de Lyapunov no estudo de sistemas baseados em regras fuzzy. Porém, neste artigo citado, diferentemente do nosso, essa função é utilizada para ajudar a construir a base de regras e não para estudar a estabilidade de equilíbrios, como se faz tradicionalmente em sistemas dinâmicos. A nosso ver, a metodologia sugerida em [8] torna-se um tanto limitada, já que o sistema fica "calibrado" por uma função de Lyapunov arbitrariamente escolhida. Ou seja, o modelo matemático deve se adequar a essa função, de tal forma que a adoção de outra função de Lyapunov possivelmente resultaria em um modelo diferente do primeiro. Isso, do ponto de vista de modelagem, poderia descaracterizar o fenômeno em questão.

Note que para um sistema baseado em regras fuzzy não temos em mãos o campo de direções f que aparece em (1). Dessa forma, o estudo de estabilidade por meio do sinal dos autovalores do sistema linearizado torna-se inviável. Esse foi o motivo que nos levou a explorar o método direto de Lyapunov, já que a função $V(x)$, mesmo nas equações diferenciais clássicas, pode ser escolhida independentemente do conhecimento do campo f.

3 Um exemplo

Para ilustrar nossa metodologia vamos estudar o sistema SIS (suscetível-infectado-suscetível) com dinâmica vital e população total constante . Essa hipótese faz com que $S + I = N$ e, do ponto de vista de dinâmica, basta investigarmos a evolução de uma das classes, (suscetíveis, por exemplo) que a outra é obtida pelo complementar ($I = N - S$). Assim, adotaremos S como variável de estado e entrada do sistema fuzzy enquanto a variação específica $(1/S)dS/dt$ é a saída do sistema.

O modelo epidemiológico SIS pressupõe que indivíduos não adquirem imunidade, isto é, cada infectado que se recupera passa a ser suscetível imediatamente [5]. Essa hipótese faz com que as regras sejam norteadas pelo seguinte raciocínio: quando o número de suscetíveis é pequeno, surgem poucos casos novos de infectados, o que contribui para que a classe de suscetíveis não diminua. Além disso, como a população total é constante e todos os indivíduos nascem suscetíveis, a população de suscetíveis aumenta. Por outro lado, à medida que o número de suscetíveis vai crescendo, novos casos da doença vão surgindo, de forma que a variação na classe de suscetíveis (embora ainda positiva) diminua. Quando o número de suscetíveis é suficientemente grande (neste caso denominado como "alto"), o número de novos casos de infecção também cresce e isso faz com que a variação na classe dos indivíduos suscetíveis passe a ser negativa.

Resumidamente escolhemos as regras fuzzy abaixo para nosso sistema:

Se S for baixo (B) então $(1/S)dS/dt$ é altoPositivo (AP).
Se S for médioBaixo (mB) então $(1/S)dS/dt$ é baixoPositivo (bP).
Se S for médioAlto (mA) então $(1/S)dS/dt$ é baixoPositivo (bP).
Se S for alto (A) $(1/S)dS/dt$ é baixoNegativo (bN).

Cada termo: baixo, médioBaixo, alto, ... é modelado por um conjunto fuzzy [2] com as funções de pertinência ilustradas nas Figuras 1 e 2.

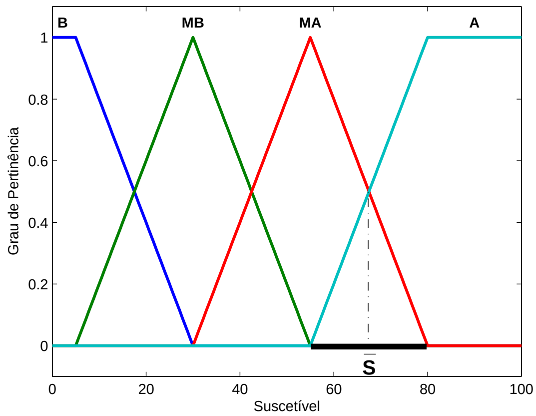

Figura 1: Funções de pertinência para S.

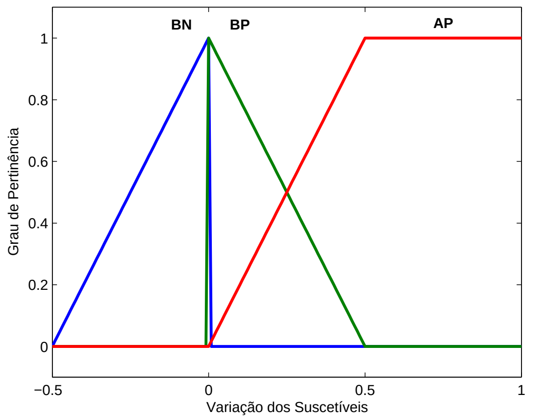

Figura 2: Funções de pertinência para (1/S)dS/dt.

Com as funções de pertinência escolhidas (contínuas) para os conjuntos fuzzy da base de regras, de acordo com [10], o estado de equilíbrio $\overline{S}$ existe e é obtido pela intersecção entre os conjuntos fuzzy médioAlto e Alto, antecedentes das terceira e quarta regras. Isso é consequência da troca de sinais nos consequentes dessas regras - baixoPositivo e baixoNegativo. Assim, $\overline{S} = 67,5$ (veja Figura 1). Mais ainda, como esses consequentes passam de positivo para negativo (veja Figura 2), a saída $F(s)$ do sistema fuzzy é tal que, para s numa vizinhança $U - \{\overline{S}\}$, $F(s) > 0$ se $s < \overline{S}$ e $F(s) < 0$ se $s > \overline{S}$ (veja Figura 3).

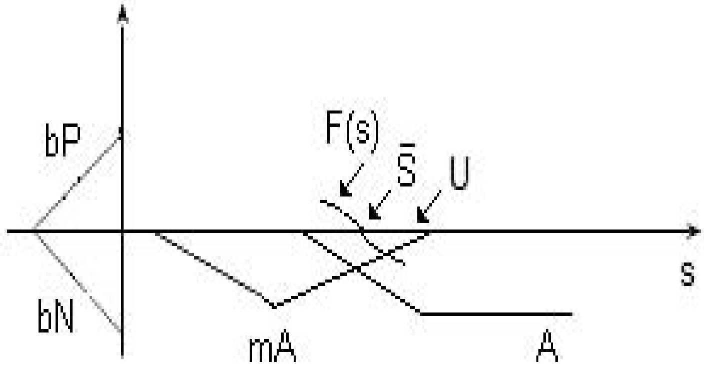

Figura 3: Vizinhança U em que a saída $F(s)$ do sistema fuzzy troca de sinal.

Agora, claramente, $V(s) = (1/2)(s-\overline{S})^2$ é uma função positiva definida e $V'(s) = \nabla V(s).F(s)$ $= (s-\overline{S})F(s) < 0$ para todo s em $U - \{\overline{S}\}$. Logo, $V(s)$ é uma função de Lyapunov e $\overline{S}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Consequentemente, a doença tende a se estabilizar no equilíbrio ($\overline{S}$, N-$\overline{S}$).

Simulações numéricas foram realizadas para obtermos S e I como funções de of t, usando software Matlab e o método de Euler. Usando o método de Runge-Kutta os resultados são similares. Podemos visualizar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio na figura 4, considerando como condições iniciais S(0)=80 e I(0)=20.

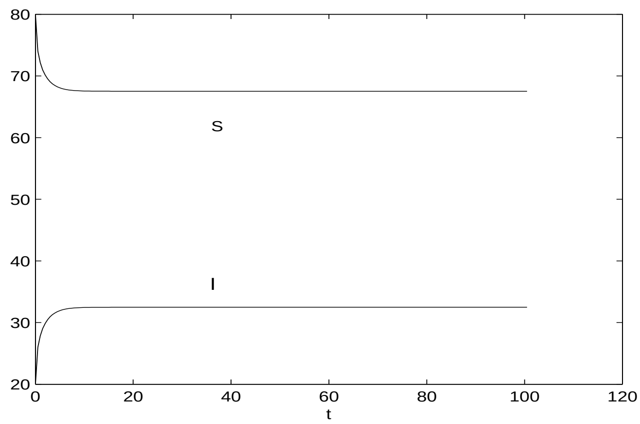

Figura 4: Evolução temporal dos suscetíveis e infectados com condições iniciais S(0)=80 e I(0)= 20.

4 Comentários finais

Aqui propomos uma metodologia para se estudar estabilidade de equilíbrios para sistemas cujo campo de direções é parcialmente conhecido e dado por uma base de regras fuzzy. O método de inferência fuzzy adotado foi aquele conhecido na literatura por inferência de Mamdani [1]. Queremos ressaltar que o método de inferência de Takagi-Sugeno [9] também poderia ser utilizado e, nesse caso, poder-se-ia ter explicitamente a saída do controlador, representando o campo de direções da equação diferencial, e aí a metodologia aqui proposta ficaria semelhante à que se encontra na literatura de equações diferenciais, com a observação que o equilíbrio seria obtido via base de regras. O estudo da estabilidade dos estados de equilíbrio poderia ser feito por meio da linearização da saída do sistema fuzzy, uma vez que o método de Takagi-Sugeno fornece explicitamente tal saída.

No caso do modelo SIS com população total constante e dinâmica vital, analisado acima, a metodologia utilizada pode facilitar a estimativa de importantes parâmetros epidemiológicos, que determinam sob quais condições a doença se propaga na população. A obtenção desses parâmetros nos modelos determinísticos clássicos envolve o conhecimento de taxas nem sempre fáceis de serem medidas (como a taxa de contato, por exemplo). A partir de taxas demográficas e valores conhecidos para uma doença específica (como taxa de recuperação), podemos estimar o valor de reprodutibilidade basal a partir das funções de pertinência, que nos modelos determinísticos envolve o conhecimento das taxas de natalidade, recuperação e contato.

Essa mesma metodologia pode ser aplicada num sistema bidimensional, como os modelos SIR e SIRS.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o suporte financeiro da FAPESP, processo no. 06/05920-7 e CNPq, processo no. 307890/2006-6.

Referências

[1] M. Amendola, A. L. Souza e L.C.Barros, "Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no Matlab 6.5", versão 2005 do manual apresentado no Ciclo de Palestras/2004, realizado na FEAGRI-UNICAMP. Disponível e http://www.ime.unicamp.br/ laeciocb, acesso em 17.8.2005.

[2] L.C.Barros, R.C. Bassanezi, "Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática", Coleção IMECC - Textos Didáticos (5), Campinas, 2006.

[3] M.R.B.Dias,"Equações diferenciais ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido", Dissertação de mestrado, IMECC-Unicamp, 2006.

[4] J.Hale and H.Koçak, "Dynamics and bifurcations", Springer Verlag, New York, 1991.

[5] L.Edelstein-Keshet, "Mathematical Models in Biology", Random House, New York, 1988.

[6] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic- theory and applications, Prentice Hall, 1995.

[7] V.Krivan and G. Colombo, A non-stochastic approach for modeling uncertainty in population dynamics, *Bulletin of Mathematical Biology* 60(1998) 721-751.

[8] M. Margaliot and G. Langholz, Fuzzy Lyapunov apporach to the design of fuzzy controllers, *Fuzzy Sets and Systems*, 106 (1999) 49-59.

[9] E. Massad, N.R.S. Ortega, L.C.Barros, C.J. Struchiner, "Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond", Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[10] J.D.M Silva, "Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática", Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, 2006.