 ISSN 1984-820X

# Extensão de $T$-normas sobre Reticulados Completos

**Eduardo S. Palmeira**, **Benjamin R. C. Bedregal**,
Depto de Informática e Matemática Aplicada, DIMAP, UFRN,
59072-970, Natal, RN
E-mail: bedregal@dimap.ufrn.br, espalmeira@ppgsc.ufrn.br,

**Germán H. Gomero**
UESC - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
45662-000, Ilhéus, BA
E-mail: gigferrer@uesc.br.

**Resumo:** *Dados um reticulado limitado $L$, um subreticulado $N$ e uma t–norma $T_N$, podemos indagar a respeito da possibilidade de construirmos uma t-norma $T$ sobre $L$ de tal modo que $T$ seja uma extensão de $T_N$, isto é, definir $T : L \times L \longrightarrow L$ de forma que $T|_N = T_N$. Nesse trabalho, apresentamos formas de atacar esse problema clássico, considerando $N$ um subreticulado completo do reticulado completo $L$. Em outras palavras, mostramos que, neste caso, essa extensão existe, entretanto não é única.*

**Palavras-chave:** *Reticulados, t-norma, extensão, morfismo de reticulados.*

## 1 Introdução

Como é bem conhecido, podemos definir um reticulado $L$ sob dois pontos de vista: como estrutura algébrica ou considerando $L$ um conjunto parcialmente ordenado. O interessante é que essas definições são equivalentes.

Entretanto, quando pensamos em morfismos, a estrutura deve ser levada em consideração, visto que a ideia de morfismo para reticulados definidos a partir de uma ordem parcial não é equivalente a noção de morfismo sobre reticulados algébricos. Mais especificamente, mostramos que todo morfismo de reticulados definidos algebricamente é um morfismo para reticulados como conjuntos parcialmente ordenados, mas a recíproca não é verdadeira. Consideramos aqui esse fato como preceito para definirmos subreticulados de uma maneira mais geral.

Em seguida, buscamos explorar o conceito de extensão de funções aplicadamente ao conceito de $t$-normas dada sobre um subreticulado. Note que, é pertinente pensar nesse tipo de questão, visto que uma $t$-norma $T_N$ definida sobre um subreticulado $N$ de um dado reticulado $L$, antes de mais nada é uma função $T_N : N \times N \longrightarrow N$ a qual satisfaz algumas propriedades específicas. Assim, encontrar uma extensão de $T_N$ a $L$ trata-se de definir uma função $T : L \times L \longrightarrow L$ a qual herda as propriedades características de $T_N$ e ainda satisfaz $T|_N = T_N$.

## 2 Reticulado Limitado

**Definição 2.1** *Seja $\leqslant$ uma ordem parcial sobre o conjunto $L$. Dizemos que $(L, \leqslant)$ é um reticulado se para todo $a, b \in L$ o conjunto $\{a, b\}$ possuir um supremo e um ínfimo. Se existirem elementos $1$ e $0$ de $L$ tais que $x \leqslant 1$ e $0 \leqslant x$ para todo $x \in L$, dizemos que $\mathbf{L} = \langle L, \leqslant, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado.*

**Exemplo 2.1** *O conjunto das partes de um conjunto $X$ munido da ordem parcial $\subseteq$ é um reticulado limitado*

**Exemplo 2.2** $(\mathbb{N}, \leqslant)$ *é um reticulado limitado inferiormente pelo zero e que não possui limitante superior.*

Por outro lado, podemos definir reticulado limitado como uma estrutura algébrica. Isso é feito da seguinte maneira:

**Definição 2.2** *Sejam $L$ um conjunto não vazio e $\wedge$ e $\vee$ duas operações binárias sobre $L$. Dizemos que $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ é um reticulado se para quaisquer $x, y, z \in L$ valem as seguintes propriedades:*

1. $x \wedge y = y \wedge x$ *e* $x \vee y = y \vee x$;
2. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ *e* $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \wedge z)$;
3. $x \wedge (x \vee y) = x$ *e* $x \vee (x \wedge y) = x$.

*Se existirem no reticulado $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ elementos $1$ e $0$ tais que para todo $x \in L$, tenha-se $x \wedge 1 = x$ e $x \vee 0 = x$ dizemos que $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0 \rangle$ é um reticulado limitado.*

**Exemplo 2.3** *O conjunto $\mathbf{I} = \langle [0,1], \wedge, \vee, 1, 0 \rangle$, onde $x \wedge y = \min\{x, y\}$ e $x \vee y = \max\{x, y\}$ é um reticulado limitado.*

**Exemplo 2.4** *Sejam $X$ um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(X)$ o seu conjunto das partes. Portanto, temos que $\mathbf{X} = \langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, X, \emptyset \rangle$ é um reticulado limitado.*

**Exemplo 2.5** *Sejam $\mathbf{L} = \langle L, \wedge_L, \vee_L, 1_L, 0_L \rangle$ e $\mathbf{M} = \langle M, \wedge_M, \vee_M, 1_M, 0_M \rangle$ reticulados limitados. Para $(a, b)$ e $(c, d)$ elementos do produto $L \times M$ definamos as operações*

$$(a, b) \wedge (c, d) = (a \wedge_L c, b \wedge_M d);$$
$$(a, b) \vee (c, d) = (a \vee_L c, b \vee_M d).$$

*Sendo assim, $\mathbf{L} \times \mathbf{M} = \langle L \times M, \wedge, \vee, (1_L, 1_M), (0_L, 0_M) \rangle$ é um reticulado limitado. Vale destacar que*

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \quad \text{se e somente se} \quad x_1 \leqslant_L y_1 \text{ e } x_2 \leqslant_M y_2$$

**Exemplo 2.6** *Sendo $\mathbf{L}$ um reticulado limitado, podemos definir um novo reticulado $\mathbb{I}\mathbf{L} = \langle IL, \wedge, \vee, [1,1], [0,0] \rangle$ onde $IL = \{[x, y] \mid x, y \in L \text{ e } x \leqslant_L y\}$ e as operações $\wedge$ e $\vee$ são dadas por*

$$[x_1, y_1] \wedge [x_2, y_2] = [x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2]$$

*e*

$$[x_1, y_1] \vee [x_2, y_2] = [x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2].$$

*Ainda,*

$$[x_1, y_1] \leqslant [x_2, y_2] \;\Leftrightarrow\; x_1 \leqslant_L x_2 \text{ e } y_1 \leqslant_L y_2$$

O interessante é que as Definições 2.1 e 2.2 são equivalentes. Com efeito, se considerarmos o reticulado limitado $\mathbf{L}$ como um conjunto parcialmente ordenado, então podemos definir naturalmente as operações binárias:

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \qquad x \vee y = \sup\{x, y\}$$

$\forall\, x, y \in L$. Dessa forma, $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado no sentido algébrico.

Por outro lado, se $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ for um reticulado limitado no sentido algébrico podemos definir sobre $L$ uma ordem parcial por: $\forall\, x, y \in L$ $x \leqslant_L y$ se e somente se $x \wedge y = x$ (ou $x \vee y = y$).

Vejamos agora como definir morfismos de reticulados limitados nos dois sentidos.

**Definição 2.3** *Sejam $(L, \leqslant_L)$ e $(M, \leqslant_M)$ reticulados limitados. Dizemos que uma aplicação $f : L \longrightarrow M$ é um homomorfismo (na ordem) de reticulados limitados se preserva ordem e elementos extremantes, isto é, se para quaisquer $x, y \in L$, tem-se que*

1. *$x \leqslant_L y \Rightarrow f(x) \leqslant_M f(y)$,*
2. *$u = \inf\{x, y\}$ e $v = \sup\{x, y\} \Rightarrow f(u) = \inf\{f(x), f(y)\}$ e $f(v) = \sup\{f(x), f(y)\}$.*

**Definição 2.4** *Sejam $\mathbf{L} = \langle L, \wedge_L, \vee_L, 1_L, 0_L\rangle$ e $\mathbf{M} = \langle M, \wedge_M, \vee_M, 1_M, 0_M\rangle$ reticulados limitados. Uma aplicação $f : L \longrightarrow M$ é dita um homomorfismo (algebricamente) de reticulados se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$f(x \wedge_L y) = f(x) \wedge_M f(y)$;*
2. *$f(x \vee_L y) = f(x) \vee_M f(y)$;*
3. *$f(0_L) = 0_M$ e $f(1_L) = 1_M$.*

Note que, um homomorfismo de reticulados definido algebricamente é também um homomorfismo na ordem. De fato, se $f : L \longrightarrow M$ é um homomorfismo como na Definição 2.4, desde que $x \leqslant y$ se e somente se $x \wedge y = x$, então $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, e daí, $f(x) \leqslant f(y)$.

Entretanto, a recíproca não vale em geral. Se $f : L \longrightarrow M$ é um homomorfismo na ordem, desde que $x \wedge y \leqslant x$ e $x \wedge y \leqslant y$, segue que $f(x \wedge y) \leqslant f(x)$ e $f(x \wedge y) \leqslant f(y)$. Daí, $f(x \wedge y) \leqslant f(x) \wedge f(y) = \inf\{f(x), f(y)\}$, contudo, pode acontecer que $f(x \wedge y) \neq \inf\{f(x), f(y)\}$. A exemplo disso, consideremos os reticulados $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ dados pelos seguintes diagramas de Hasse, como dados abaixo

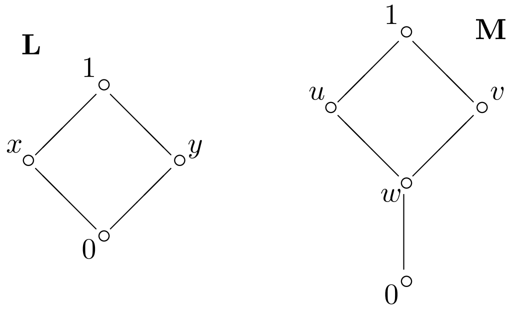


Figura 1: Diagramas de Hasse para os reticulados L e M

A função $f : L \longrightarrow M$, definida de forma a preservar os extremos e tal que $f(x) = u$ e $f(y) = v$, é um homomorfismo de acordo com a Definição 2.3, mas não é um homomorfismo de acordo com a Definição 2.4, pois não preserva a operação $\wedge$.

O interessante é que, mesmo não existindo uma equivalência entre as definições de homomorfismo dadas acima, a noção de isomorfismo entre dois reticulados **L** e **M** coincide independentemente se estivermos considerando-os no sentido da ordem ou algebricamente.

Com efeito, se $f : L \longrightarrow M$ é um isomorfismo (homomorfismo bijetor, cuja inversa é também um homomorfismo) de reticulados limitados no sentido da ordem, como sabemos que vale a desigualdade $f(x \wedge y) \leqslant f(x) \wedge f(y), \forall\, x, y \in L$ e desde que $f^{-1}$ é um homomorfismo, segue:

$$f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) \leqslant f^{-1}(f(x)) \wedge f^{-1}(f(y)) = x \wedge y.$$

Logo, $f(x) \wedge f(y) \leqslant f(x \wedge y)$ e, daí

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Analogamente, verifica-se que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. Portanto, $f$ é um isomorfismo de acordo com a Definição 2.4.

Devido a esse fato, optamos, neste trabalho, por definir a ideia de subreticulado via isomorfismos de reticulados limitados, visto que, definindo assim, temos a vantagem de poder falar de subreticulados sem a necessidade de enfatizar se é no sentido da definição da ordem ou algebricamente.

**Definição 2.5** *Sejam* **L** *e* **M** *dois reticulados limitados. Uma imersão de $L$ em $M$ é um homomorfismo (no sentido algébrico ou na ordem) injetivo $f : L \longrightarrow M$. Um mergulho de $L$ em $M$ é uma imersão $f$ tal que $L$ e $f(L)$ são isomorfos.*

**Definição 2.6** *Dizemos que o subconjunto $N$ do reticulado limitado $M$ é um subreticulado, se $N$ é imagem de algum mergulho em $M$.*

**Exemplo 2.7** *Seja $L$ um reticulado limitado. Consideremos os reticulados limitados* $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ *e* $\mathbb{I}\mathbf{L}$ *como nos Exemplos 2.5 e 2.6, respectivamente. Logo,* $\mathbb{I}\mathbf{L}$ *é naturalmente um como subreticulado de* $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$*, pois podemos sempre definir o mergulho $i : \mathbb{I}\mathbf{L} \longrightarrow L \times L$ por $i([x, y]) = (x, y)$ para todo $x, y \in L$. Portanto, podemos olhar para* $\mathbb{I}\mathbf{L}$ *como subreticulado de* $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$*, mesmo que esses conjuntos tenham elementos de natureza distinta.*

# 3 Reticulado Completo

**Definição 3.1** *Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado $(L, \leqslant)$ é um reticulado completo se para todo subconjunto $N$ de $L$ existirem* $\sup N$ *(supremo de $N$) e* $\inf N$ *(ínfimo de $N$) em $L$. Denotamos* $\sup N$ *e* $\inf N$*, respectivamente, por $\bigvee N$ e $\bigwedge N$.*

**Exemplo 3.1** *Os conjuntos* **I** *e* **X** *como definidos nos Exemplos 2.3 e 2.4, são reticulados completos.*

**Exemplo 3.2** *Todo reticulado limitado finito (com um número finito de elementos) é um reticulado completo.*

**Definição 3.2** *Dados dois reticulados completos $L$ e $M$, dizemos que a função $f : L \longrightarrow M$ é um homorfismo de reticulados completos se, para todo $A \subseteq L$, satisfaz:*

1. $f(\bigwedge A) = \bigwedge\{f(a) \mid a \in A\}$;
2. $f(\bigvee A) = \bigvee\{f(a) \mid a \in A\}$.

Note que, a partir das Definições 2.6 e 3.1, podemos inferir que se $N \subseteq L$ e $L$ é um reticulado completo, diremos que $N$ é um subreticulado completo de $L$ se para todo subconjunto $A$ de $N$ os elementos $\bigvee A$ e $\bigwedge A$ pertencem a $N$.

# 4 Extensão de T-normas

**Definição 4.1** *Dado um reticulado limitado $L$, uma operação binária $T : L \times L \longrightarrow L$ é dita uma t-norma se, para todo $x, y, z \in L$, satisfaz*

1. $T(x, y) = T(y, x)$;
2. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$;
3. $T(x, 1) = x$;
4. *Se* $x \leqslant y$ *então* $T(x, z) \leqslant T(y, z), \ \forall \ z \in L$.

Dados $N$ um subreticulado do reticulado $L$ e uma $t$-norma $T_N$ sobre $N$, será que é possível estender $T_N$ a uma $t$-norma $T$ em $L$, tal qual $T|_N = T_N$? Em outras palavras, como podemos exibir uma extensão de $T_N$ a $L$ de forma que as propriedades de $t$-norma sejam preservadas?

Em geral, esse tipo de questão não possui uma solução natural. Normalmente, é necessário exigir algum tipo de restrição ou propriedade sobre o conjunto ou parte dele. Por exemplo, dada uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$, onde $X$ é um subconjunto do espaço topológico $Y$, não é sempre verdade que $f$ pode ser estendida a $F : Y \longrightarrow Y$, preservando a continuidade e de forma que $F|_X = f$, a menos que $X$ seja um conjunto fechado.

Esse tipo de problema também acontece quando tratamos de $t$-normas. Na maioria dos casos, dada uma $t$-norma $T_N$ sobre $N$, onde $N$ é um subreticulado do reticulado limitado $L$, a extensão falha na preservação da ordem, como podemos ver no exemplo abaixo.

**Exemplo 4.1** *Sejam $N \subseteq L$ um subreticulado e $T_N$ uma t-norma em $N$. Definamos $T : L \times L \longrightarrow L$ tal que*

$$T(x, y) = \begin{cases} T_N(x, y), & \text{se } (x, y) \in N \times N; \\ x, & \text{se } y = 1_L; \\ y, & \text{se } x = 1_L; \\ 0, & \text{demais casos.} \end{cases}$$

*Logo, temos que $T|_N = T_N$, isto é, $T$ é uma extensão de $T_N$. Contudo, $T$ não é uma t-norma, pois o fato de definirmos $T(x, y) = 0$ para os elementos tais que $(x, y) \notin N \times N$, $x \neq 1_L$ e $y \neq 1_L$, faz com que $T$ não preserve a ordem (item (4) da definição definição 4.1).*

Entretanto, se considerarmos reticulados completos ao invés de simplesmente reticulados limitados esse problema pode ser contornado, isto é, se $L$ é um reticulado completo e $N \subseteq L$ um subreticulado completo, dada uma $t$-norma $T_N$ sobre $N$, podemos definir naturalmente $T : L \times L \longrightarrow L$ tal que:

$$T(x, y) = \begin{cases} T_N(x, y), & \text{se } (x, y) \in N \times N; \\ T_N(\varphi(x), \varphi(y)), & \text{demais casos}; \end{cases}$$

onde $\varphi : L \longrightarrow N$ é dada por

$$\varphi(x) = \sup\{y \in N \mid y \leqslant_L x\}. \tag{1}$$

Note que, mesmo que tenhamos $\{y \in N \mid y \leqslant_L x\} = \emptyset$ o supremo desse comjunto existe, considerando o relevante fato de $\sup \emptyset = \bigwedge N$. Logo, a função $\varphi$ está bem definida, visto que, como $L$ é reticulado completo e ainda $\{y \in N \mid y \leqslant_L x\} \subseteq N$, segue, portanto, que $\sup\{y \in N \mid y \leqslant_L x\} \in N$, isto é, $\varphi(x) \in N$.

Assim, podemos afirmar que $T$ é uma $t$-norma sobre $L$ que estende $T_N$. Com efeito, basta observarmos que o fato de $\varphi(x), \varphi(y) \in N$, para todo $x, y \in L$, nos permite concluir que podemos calcular $T_N$ sobre o par ordenado $(\varphi(x), \varphi(y))$, fazendo com que $T$ herde, naturalmente, as propriedades de $t$-norma de $T_N$. Além disso, é óbvio que $T|_N = T_N$.

De maneira inteiramente análogo, temos o mesmo resultado definindo uma função $\psi : L \longrightarrow N$ tal que

$$\psi(x) = \inf\{y \in N \mid y \geqslant_L x\}. \tag{2}$$

Mais uma vez temos que $\inf\{y \in N \mid y \geqslant_L x\} \in N$, levando em consideração que $N$ é completo e ainda $\{y \in N \mid y \geqslant_L x\} \subseteq N$.

Portanto, $T : L \times L \longrightarrow L$ dada por

$$T(x,y) = \begin{cases} T_N(x,y), & \textit{se } (x,y) \in N \times N; \\ T_N(\psi(x), \psi(y)), & \textit{demais casos.} \end{cases}$$

perfaz uma outra maneira de definirmos uma extensão de uma certa $t$-norma $T_N$ dada sobre o subreticulado completo $N$ do reticulado completo $L$.

**Observação 4.1** *Sejam $L$ um reticulado, $N \subseteq L$ um subreticulado e $T_N$ uma $t$-norma sobre $N$. Suponha que possamos definir uma $t$-norma $T$ sobre $L$ que estende $T_N$, isto é, $T|_N = T_N$. Esse fato não nos permite concluir que $L$ é reticulado completo. A exemplo disso, seja $L \times L = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se $N = \mathbb{I}\mathbf{L}$ o qual é subreticulado de $L \times L$ (como podemos ver no exemplo 2.7) e $T_N$ a $t$-norma sobre $N$ definida por $T_N([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$, então a $t$-norma $T$ sobre $L \times L$ dada por $T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ estende $T_N$. Entretanto, nem $L \times L$ nem $N$ são reticulados completos.*

Para finalizar, gostariamos de introduzir o conceito de automorfismo com o intuito de apresentar uma propriedade interessante. Como podemos ver em [1], a partir de uma $t$-norma $T$ sobre um reticulado limitado $L$, é possível definir uma outra $t$-norma $T^\rho$, onde $\rho : L \longrightarrow L$ é um automorfismo. Mais especificamente,

**Definição 4.2** *Seja $L$ um reticulado limitado. Uma função $\rho : L \longrightarrow L$ é dita ser um automorfismo se é uma bijeção que preserva a ordem, isto é, se $x \leqslant_L y$ então $\rho(x) \leqslant_L \rho(y)$, $x, y \in L$.*

Segue direto da definição que, os automorfismos são funções estritamente crescente. Ainda, em [1], Bedregal mostra que todo automorfismo sobre um reticulado limitado $L$ é ainda um homomorfismo de reticulados.

**Proposição 4.1** *Se $T$ é uma $t$-norma e $\rho$ um automorfismo, ambos definidos sobre um reticulado limitado $L$, então*

$$T^\rho(x,y) = \rho(T(\rho^{-1}(x), \rho^{-1}(y)))$$

*define uma $t$-norma sobre $L$.*

**Demonstração:** Veja [1].

Ressaltamos que, a Definição 4.2 e suas consequências acima citadas permanecem válidas se considerarmos reticulados completos ao invés de simplesmente reticulados limitidos.

Assim, sendo $N$ um subreticulado completo do reticulado completo $L$, $T_N$ uma $t$-norma sobre $N$ e $\rho_1 : N \longrightarrow N$ um automorfismo, podemos considerar uma nova $t$-norma $T_N^{\rho_1}$ sobre $N$, pela Proposição 4.1. Da mesma forma, se $T$ é uma $t$-norma sobre $L$, tem-se que $T^{\rho_2}$ também o será, sendo $\rho_2 : L \longrightarrow L$ um automorfismo. Assim, o cubo

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[rr, "\rho_1 \times \rho_1"] \arrow[dd, dashed, "T_N"] & & N \times N \arrow[dd, "T_N^{\rho_1}"] \\
L \times L \arrow[ur, "\varphi \times \varphi"] \arrow[rr] \arrow[dd, "T"'] & & L \times L \arrow[ur, "\varphi \times \varphi"] \arrow[dd] & \\
 & N \arrow[rr, dashed, "\rho_1"] & & N \\
L \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[rr, "\rho_2"] & & L \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

comuta, onde $\varphi$ é a função definida na Equação (1) (poderiamos também usar a função $\psi$, como definida na Equação (2) ao invés de $\varphi$). Em outras palavras, em cada face do cubo temos um quadrado que é comutativo, isto é,

$$\begin{gathered}
T_N^{\rho_1} \circ (\rho_1 \times \rho_1) = \rho_1 \circ T_N; \\
T^{\rho_2} \circ (\rho_2 \times \rho_2) = \rho_2 \circ T; \\
\varphi \circ T = T_N \circ (\varphi \times \varphi); \\
\varphi \circ T^{\rho_2} = T_N^{\rho_1} \circ (\varphi \times \varphi); \\
(\rho_1 \times \rho_1) \circ (\varphi \times \varphi) = (\varphi \times \varphi) \circ (\rho_2 \times \rho_2); \\
\rho_1 \circ \varphi = \varphi \circ \rho_2.
\end{gathered}$$

A grande vantagem desse cubo ser comutativo é que em teoria de categorias esse fato é importante para extrairmos propriedades interessantes da categoria (veja [5, 1]).

## 5 Conclusões

A ideia de estender $t$-normas de um subreticulado $N \subseteq L$ à uma $t$-norma sobre o reticulado $L$, ainda parece ter sido pouco explorada na literaltura. De fato, não encontramos nenhum trabalho que se reportasse a esse assunto.

Sendo assim, o próximo passo para futuros trabalhos seria tentar enfraquecer a hipótese de $L$ ser um reticulado completo para ver que tipo de propriedade deveriamos exigir em $N$ de forma que possamos fazer a requerida extensão.

## Referências


[1] B. C. Bedregal, H. S. Santos, R. C. Bedregal, "T-norms on bounded lattices: t-norm morphisms and operator", em IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp. 22–28, 2006.

[2] B. C. Bedregal, B. M. Acióly, "Introdução à Lógica Clássica para Ciência da Computação", Laboratório de Lógica e Inteligência Computacional, DIMAP, UFRN, Natal, 2007.

[3] B. C. Bedregal, R. C. Bedregal, H. S. SANTOS, "Bounded Lattice T-Norms as an Interval Category", em 14th Workshop on Logic, Language, Information and Computation, WoLLIC 2007, Rio de Janeiro. Lectures Notes in Computer Sciences (LNCS). Berlim: Springer-Verlag, 2007.

[4] S. Burris, H. P. Sankappanavar,"A course in Universal Algebra", The Millennium Edition, New York, 2005.

[5] T. Hungerford, "Algebra", Graduate Texts in Mathematics 73, Springer-Verlag, New York, fifth printing, 1989.