 ISSN 1984-820X

Comportamento dos zeros de polinômios sujeitos a uma perturbação do coeficiente dominante

Vanessa A. Botta P., **Messias Meneguette Jr**,
Depto de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP,
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: botta@fct.unesp.br, messias@fct.unesp.br.

Resumo: *Em algumas áreas da Matemática, como na Análise Numérica, por exemplo, é de fundamental importância o comportamento dos zeros dos polinômios algébricos na análise de algumas questões. Considerando uma classe de polinômios cujos coeficientes satisfazem algumas condições, estudaremos o comportamento dos zeros desses polinômios na tentativa de encontrar um contra-exemplo para uma conjectura apresentada por Meneguette [4].*

Palavras-chave: *Zeros de polinômios, Disco unitário, Perturbação do coeficiente dominante.*

1 Introdução

O comportamento dos zeros dos polinômios algébricos é uma subárea clássica da Análise que possui muitas questões a serem pesquisadas. Como exemplo, temos a seguinte conjectura, que é um problema que encontra-se em aberto em Meneguette [4]:

Conjectura 1.1 *Sejam* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *um polinômio tal que*

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1} \text{ e } a_n < a_{n-1},$$

cujos zeros encontram-se no disco unitário, e $P'(z)$ *com os coeficientes ordenados. Então, os zeros do polinômio*

$$P_\gamma(z) = (a_n + \gamma)z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

encontram-se no disco unitário, para todo $\gamma > 0$.

Até o presente momento, o autor desta conjectura não obteve respostas a respeito de sua validade ou não no caso geral. Botta, Meneguette e Cuminato [1] provaram sua validade no caso em que o polinômio $P(z)$ é um polinômio reflexivo, ou seja,

$$a_i = a_{n-i}, \; a_i > 0 \; (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

onde

$$a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1} \text{ e } a_{n-1} > a_n.$$

Além disso, Botta [2] mostrou sua validade quando os coeficientes do polinômio $P(z)$ apresentado na conjectura acima satisfazem as seguintes condições

$$a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} > a_n$$

e

$$pa_i < (p-1)a_{i+1}, \; i = 0, 1, \ldots, n-2, \text{ e } pa_n > (p-1)a_{n-1},$$

onde p é um número inteiro positivo, $p > 1$.

Na tentativa de buscar um contra-exemplo para a Conjectura 1.1, analisaremos, nesse trabalho, uma classe de polinômios cujos coeficientes satisfazem

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$$

e

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} < a_m = a_{m+1} = \ldots = a_{2m-1} < a_{2m} = a_{2m+1} = \ldots,$$

ou seja, os coeficientes de $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ são iguais e consecutivos a cada m elementos.

2 Resultados clássicos

O primeiro resultado a ser apresentado é o teorema de Eneström-Kakeya, que determina a quantidade de zeros de um polinômio no disco unitário.

Teorema 2.1 (Eneström-Kakeya) *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ um polinômio cujos coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, satisfazem*

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n.$$

Então, $P(z)$ possui seus zeros em $|z| \leq 1$.

O resultado a seguir mostra que se um polinômio tem coeficientes a_i sucessivos e iguais a cada m elementos, então $P(z)$ tem pelo menos um zero de módulo um. Tal teorema pode ser encontrado em Marden [3].

Teorema 2.2 *O polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ tal que*

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$$

e

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} > a_m = a_{m+1} = \ldots = a_{2m-1} > a_{2m} = a_{2m+1} = \ldots$$

possui pelo menos um zero de módulo um.

Serão utilizadas também as fórmulas de Vieta, que determinam relações entre os zeros de um polinômio e seus coeficientes, dadas por

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \ldots z_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \\ z_1 z_2 \ldots z_{n-1} + \ldots + z_2 z_3 \ldots z_n &= (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n} \\ &\vdots \\ z_1 + z_2 + \ldots + z_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \end{aligned}$$

onde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são os zeros do polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$.

3 Análise dos resultados

Sejam

$$P_\lambda(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + (a_n - \lambda)z^n, \ \lambda > 0$$

e

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n$$

tal que

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$$

e

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} > a_m = a_{m+1} = \ldots = a_{2m-1} > a_{2m} = a_{2m+1} = \ldots.$$

Como $P(z)$ tem os coeficientes ordenados, pelo Teorema de Eneström-Kakeya segue que os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$. Além disso, pelo Teorema 2.2, pelo menos um zero de $P(z)$ tem módulo um. Portanto, qualquer perturbação no coeficiente dominante de $P(z)$ acarretará uma perturbação nos zeros de $P(z)$, podendo estes saírem ou entrarem no disco unitário. Experimentos computacionais nos revelam uma tendência dos zeros saírem do disco unitário. Então, uma questão que surge é a seguite: será que esses zeros poderão voltar no disco unitário dependendo de λ? Se for possível mostrar que isso ocorre, teríamos um contra-exemplo para a Conjectura 1.1, pois assim mostraríamos que existe $\gamma > 0$ tal que os zeros de $P_\gamma(z)$ definido na Conjectura 1.1 poderiam sair do disco unitário, contradizendo a tese da Conjectura 1.1.

Para responder essa questão, consideraremos, primeiramente, o caso em que $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$. Então, para $\lambda > 0$ e tal que $a_n - \lambda > 0$, temos que pelo menos um zero de $P_\lambda(z)$ sai do disco unitário, pois

$$a_0 = a_n \Rightarrow a_0 > a_n - \lambda \Rightarrow |a_0| > |a_n - \lambda|$$

e, pelas fórmulas de Vieta,

$$|z_1||z_2|\ldots|z_n| = \frac{|a_0|}{|a_n - \lambda|} > 1,$$

onde z_1, z_2, ..., z_n são os zeros de $P_\lambda(z)$, indicando que pelo menos um zero de $P_\lambda(z)$ encontra-se fora do disco unitário. Observemos que esse caso pode ocorrer se n é par ou ímpar. Portanto, se $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, não foi possível encontrar um contra-exemplo para a conjectura.

Analisaremos agoram o caso em que n é ímpar e m é par. Neste caso, teremos

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} - a_n = 0,$$

ou seja, $z = -1$ é um zero de $P(z)$.

Além disso,

$$P_\lambda(-1) = P(-1) + \lambda = \lambda > 0.$$

Logo, como $P_\gamma(z) < 0$ para $z \to -\infty$ e $P_\lambda(-1) > 0$, existe pelo menos um zero real de $P_\lambda(z)$ em $(-\infty, -1)$, ou seja, pelo menos um zero encontra-se fora do disco unitário. Portanto, com essas condições sobre os coeficientes, não foi possível encontrar um contra-exemplo para a Conjectura 1.1.

O caso em que m e n são ímpares e n é par será objeto de estudo para projetos futuros.

Com essas análises foi possível mostrar que, mesmo não sendo possível encontrar um contra-exemplo para a Conjectura 1.1, são cada vez mais fortes as evidências de que ela é verdadeira.

4 Exemplos

Nessa seção apresentaremos quatro exemplos de polinômios cujos coeficientes satisfazem as condições apresentadas na seção anterior. No primeiro caso consideraremos um polinômio de grau 4, onde $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, o segundo exemplo nos traz um polinômio de grau 3 com $1 = a_0 = a_1 < a_2 = a_3 = 3$, e em seguida temos um polinômio de grau 5 onde $1 = a_0 = a_1 < a_2 = a_3 = 2 < a_4 = a_5 = 3$. Nas figuras adiante apresentamos os zeros de $P_\lambda(z)$ para $\lambda = 0$, 0.2, 0.4, 0.6 e 0.8 através das cores vermelha, lilás, verde, azul e preta, respectivamente.

Exemplo 4.1 *Seja*

$$P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| = 1$ *(representados por pontos vermelhos na figura abaixo). O polinômio*

$$P_\lambda(z) = (1 - \lambda)z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

possui zeros fora do disco, como podemos observar na Figura 1.

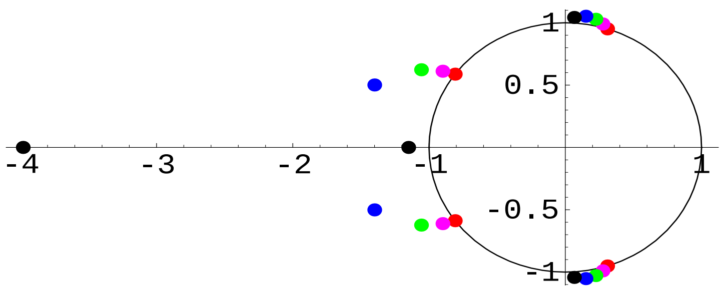

Figura 1: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (1 - \lambda)z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, $\lambda > 0$ e $1 - \lambda > 0$.

Exemplo 4.2 *Consideremos*

$$P(z) = 3z^3 + 3z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$, *e*

$$P_\lambda(z) = (3 - \lambda)z^3 + 3z^2 + z + 1.$$

O polinômio $P_\lambda(z)$ *possui zeros fora do disco (zero real negativo), como podemos observar na Figura 2.*

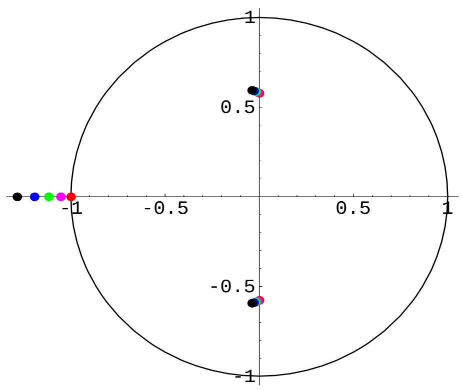

Figura 2: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (3 - \lambda)z^3 + 3z^2 + z + 1$, $\lambda > 0$ e $3 - \lambda > 0$.

Exemplo 4.3 *Seja*

$$P(z) = 3z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$. *O polinômio*

$$P_\lambda(z) = (3 - \lambda)z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1$$

possui zeros fora do disco (zero real negativo), como podemos observar na Figura 3.

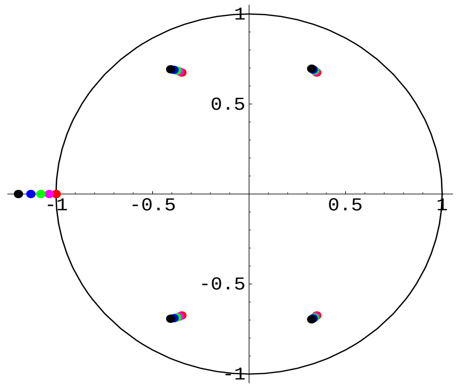

Figura 3: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (3 - \lambda)z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1$, $\lambda > 0$ e $3 - \lambda > 0$.

No próximo exemplo temos um polinômio de grau 7 onde $1 = a_0 = a_1 = a_2 = a_3 < a_4 = a5 = a_6 = a_7 = 2$. Na Figura 4 apresentamos os zeros de $P_\lambda(z)$ para $\lambda = 0,\ 0.2,\ \ldots,\ 1.8$, representados pelos pontos coloridos.

Exemplo 4.4 *Seja*

$$P(z) = 2z^7 + 2z^6 + 2z^5 + 2z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$. *O polinômio*

$$P_\lambda(z) = (2 - \lambda)z^7 + 2z^6 + 2z^5 + 2z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

possui zeros fora do disco (zero real negativo), como podemos observar na Figura 4.

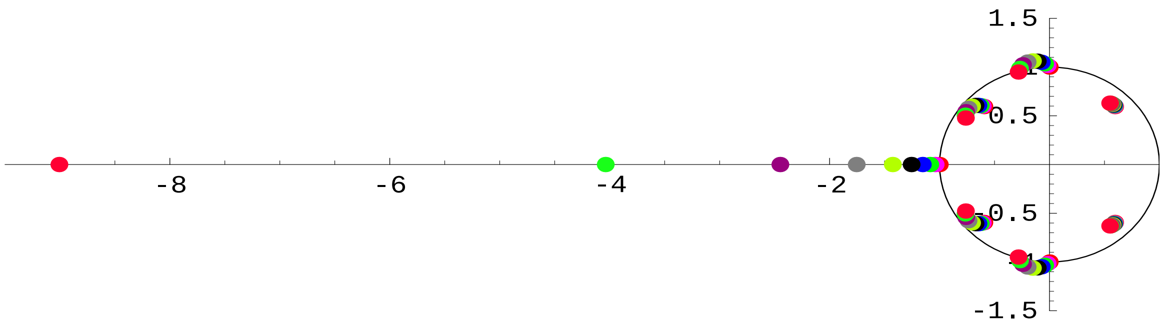

Figura 4: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (2 - \lambda)z^7 + 2z^6 + 2z^5 + 2z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, $\lambda > 0$ e $2 - \lambda > 0$.

5 Considerações finais

Analisamos, nesse trabalho, o comportamento dos zeros do polinômio $P_\lambda(z)$ cujos coeficientes satisfazem as condições apresentadas ns Seção 3. No caso em que $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, pelo menos um zero de $P_\lambda(z)$ encontra-se fora do disco unitário, podendo esse zero ser real ou não. Quando n é ímpar e m é par, foi possível mostrar que sempre existirá um zero real negativo cujo módulo é maior que um. O caso em que m e n são ímpares e n é par será objeto de estudos futuros.

Referências

[1] V. A. Botta, M. Meneguette Jr., J. A. Cuminato, *Sobre uma generalização do Teorema de Eneström-Kakeya: polinômio reflexivo*, TEMA, 9 (2008), 125-132.

[2] V. A. Botta, Zeros de polinômios característicos e estabilidade de métodos numéricos, Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2008.

[3] M. Marden, "Geometry of Polynomials", Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.

[4] M. Meneguette Jr., *Zeros in the unit disk*, SIAM Review, 36 (1994), 656-657.