 ISSN 1984-820X

Condições para detetabilidade de malha fechada para sistemas não lineares variantes no tempo

Eduardo F. Costa,
Depto de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP,
13560-970, São Carlos, SP
E-mail: efcosta@icmc.usp.br,

João Bosco R. do Val
Depto de Telemática, FEEC, UNICAMP
13081-970, Campinas, SP
E-mail: jbosco@dt.fee.unicamp.br

Resumo: *Neste trabalho estudamos condições suficientes para que um sistema não linear e uma função de custo bastante gerais apresentem uma propriedade conhecida como detetabilidade de malha fechada. Esta propriedade depende de quatro parâmetros que devem satisfazer uma condição envolvendo trajetórias de malha fechada (trajetórias do sistema sob um termo forçante, ou controle) e o custo associado, sendo consideravelmente difíceis de testar. Neste trabalho, apresentamos uma condição similar (chamada de detetabilidade de malha aberta) que, contudo, apenas precisa ser verificada para controle nulo, trivial, sendo assim bastante mais simples de testar.*

Palavras-chave: *Detetabilidade, Sistemas não Lineares, Sistemas Variantes no Tempo*

1 Introdução

O conceito de detetabilidade para sistemas lineares é de grande importância por apresentar várias propriedades, como assegurar estabilidade em problemas de controle ótimo com horizonte infinito para sistemas lineares variantes no tempo, veja por exemplo [1] e [5]. O conceito envolve apenas parâmetros relativos ao sistema não forçado, ou seja, ao sistema com entradas de controle nulas, $u_t = 0$, para todo instante de tempo $t \geq 0$. Por outro lado, quando se trata de sistemas não lineares, para se obter a mesma propriedade acima é necessário considerar noções de detetabilidade de malha fechada, como em [2], [4] e [7].

Noções de detetabilidade de malha fechada são consideravelmente mais difíceis de testar. Para a noção que consideramos neste trabalho, é preciso obter certos parâmetros que devem satisfazer uma relação entre positividade do custo considerado (este custo se trata da função objetivo do problema de controle ótimo) e contratividade da trajetória de estado do sistema, para toda sequência de controle u_t admissível. Na versão de malha aberta, estes parâmetros devem satisfazer uma relação semelhante apenas no caso em que $u_t = 0$, $t \geq 0$.

Este trabalho apresenta condições sobre o sistema não linear, variante no tempo, sob as quais a detetabilidade de malha aberta seja equivalente a de malha fechada. Com isso, caracterizamos uma classe de sistemas não lineares para os quais a condição de malha fechada é assegurada via a versão de malha aberta. Os resultados obtidos facilitam a verificação de detetabilidade e, consequentemente, estabilidade de controles ótimos de horizonte infinito, bem como estabilidade e aproximação destes controles via controles aproximativos, veja por exemplo [2]. A abordagem utilizada consiste na extensão relativamente direta de resultados anteriores para sistemas invariante no tempo, considerados em [3]. As condições obtidas referem-se a condições do tipo Lipschitz sobre as funções que definem o sistema e o custo. Mostramos que três dos quarto parâmetros dos quais depende a noção de detetabilidade de malha fechada podem ser tomados iguais ao da versão de malha aberta, de forma que apenas um daqueles parâmetros deve ser verificado diretamente em malha fechada. Estes parâmetros aparecem, por exemplo, em condições sob o "comprimento" do horizonte para que o controle de horizonte retrocedente seja estabilizante [2].

O texto é estruturado da seguinte maneira. Na Seção 2 apresentamos as definições básicas, hipóteses e a notação empregada. Em seguida, na Seção 3 desenvolvemos os resultados principais. Comentários finais são apresentados na Seção 4.

2 Formulação do problema

Considere o sistema não linear

$$\Psi : \quad z_{t+1} = f_t(z_t, u_t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

com $z_0 = z \in Z$, sendo $z_t \in Z$ o estado e $u_t \in U$ o controle. $U \subset \mathbb{R}^r$ representa o conjunto admissível de controles e $Z \subset \mathbb{R}^n$ o espaço de estado, considerado como um conjunto factível e invariante ao sistema no sentido que sempre exista $u \in U$ para o qual $f_t(z, u) \in Z$, para $t \geq 0$ e $z \in Z$. Considere φ, uma métrica apropriada em Z, um conjunto $Z_0 \subset Z$ e uma noção associada de distânca ao conjunto Z_0, $d : Z \to \mathbb{R}^+$, dada por $d(z) = \inf_{w \in Z_0} \varphi(w, z)$. Considere o problema de controle que consiste em minimizar em $u = \{u_t, t \geq 0\}$ o funcional de custo

$$J_u^{n,N}(z) = \sum_{t=n}^{n+N-1} c_t(z_t, u_t), \tag{2}$$

sempre que $z_n = z$, sendo N o chamado horizonte do problema. Assumimos controles não singulares e que f e o custo por estágio sejam funções contínuas Lipschitz, de acordo com as seguintes definições. Seja $\bar{\varphi}$ uma métrica apropriada em $\mathcal{U}$ e $\bar{d}(u) = \bar{\varphi}(u, 0)$, para cada $u \in \mathcal{U}$.

Hipótese 1 (controle não singular). *Existe uma constante $\xi > 0$ para a qual $c_t(z, u) \geq \xi \bar{d}(u)$, para todo $t \geq 0$ e $u \in U$.*

Hipótese 2. *(i)*(f Lipschitz). *Existem α_f e β_f para os quais*

$$\varphi(f_t(z, u), f_t(w, v)) \leq \alpha_f \varphi(z, w) + \beta_f \bar{\varphi}(u, v), \quad t \geq 0.$$

(ii) (c Lipschitz). *Existem α_c e β_c para os quais*

$$|c_t(z, u) - c_t(w, v)| \leq \alpha_c \varphi(z, w) + \beta_c \bar{\varphi}(u, v), \quad t \geq 0.$$

Definição 1 (Controles de custo finito). *Dizemos que u pertence a classe de controles de custo finito $\mathcal{U}_F$ se, para cada $N \geq 1$, existe um escalar $\mathcal{J}^N$ tal que $J_u^{n,N}(z) \leq \mathcal{J}^N d(z)$, $\forall z \in Z$.*

Hipótese 3. *$\mathcal{U}_F$ não é um conjunto vazio.*

A hipótese acima consiste numa hipótese de regularidade básica do problema de otimização, exigindo que para cada condição inicial exista ao menos um controle que seja compatível com o custo e com as restrições. Para garantir existência de custo finito, assumimos $c \equiv 0$ dentro de Z_0. Uma interessante discussão a respeito de ûm limitante superior para o custo pode ser encontrada em [4, Section III]. Denotamos $J^N(z) = \inf_{u \in \mathcal{U}_F} J_u^N(z)$, para $z \in Z$.

Introduzimos, abaixo, a noção de detetabilidade de malha fechada. Detetabilidade usualmente se refere ao comportamento de trajetórias de malha aberta (ou autônomas ou, ainda, não forçadas) e uma função de observação, que pode ser uma função de custo como aquela em (2), e.g. veja [1] ou [5] na formulação linear variante no tempo. No caso linear invariante no tempo, a noção de detetabilidade torna-se mais simpels, envolvendo uma condição a respeito do espaço não observável do sistema, definido pelos parâmetros fundamentais do sistema. Contudo, no contexto não linear geral, é preciso considerar versões de malha fechada de detetabilidade, como em [2], [4] e [7].

Definição 2 (MF-detetabilidade)**.** *Dizemos que* (Ψ, J) *é detetável de malha fechada (MF-detetável) se, para cada* u*, existirem inteiros* N_d*,* $t_d \geq 0$ *e escalares* $0 \leq \delta < 1$*,* $\gamma > 0$ *para os quais* $J_u^{n,N_d}(z) \geq \gamma d(z_n)$ *sempre que* $d(z_{n+t_d}) \geq \delta d(z_n)$*.*

Neste trabalho, estamos enfocando a questão de que MF-detetabilidade pode ser "substituida" por uma versão de malha aberta, mais simples de testar. Esta versão de detetabilidade é definida a seguir. Seja a seguinte versão do sistema Ψ,

$$\Psi_0 : \qquad z_{t+1}^0 = f_t(z_t^0, 0), \quad z_0^0 = z \tag{3}$$

sendo z^0 o estado do sistema. Assumimos que $u_t = 0$, $t \geq 0$, pertence a classe $\mathcal{U}_F$, o que sem dúvida vale para o caso irrestrito $Z = \mathbb{R}^n$.

Definição 3 (MA-detetabilidade)**.** *Dizemos que* (Ψ, J) *é detetável de malha aberta (MA-detetável) se, para a trajetória autônoma, existirem inteiros* N_d*,* $t_d \geq 0$ *e escalares* $0 \leq \delta < 1$*,* $\gamma > 0$ *para os quais* $J_{u\equiv 0}^{n,N_d}(z_n) \geq \gamma d(z)$ *sempre que* $d(z^0(n + t_d)) \geq \delta d(z_n)$*,* $\forall z \in \mathcal{Z}$*.*

Observação 1 (Papel da detetabilidade)**.** *MF-detetabilidade tem um papel fundamental na estabilidade de problemas de controle ótimo , uma vez que relaciona o custo com a contratividade da trajetória. Por exemplo, se o custo de horizonte infinito for finito, digamos* J*, então uma trajetória não pode permanecer fora de uma bola de um determinado raio* r *por um intervalo de tempo muito grande, caso contrário a condição de contratividade* $(d(z^0(n + t_d)) \geq \delta d(z_n))$ *seria violada um número suficientemente grande de vezes* N*, de forma que o custo total seria da ordem de* $N\gamma r > J$*. Assim, a trajetória eventualmente penetra esta bola de raio* r*; repetindo esta argumentação a partir deste instante de tempo, conclui-se que a trajetória entra uma bola de raio* r^2 *e assim sucessivamente, levando a estabilidade exponencial [8]. É oportuno observar que estabilidade exponencial, no contexto presente, significa que a trajetória se aproxima de* Z_0 *exponencialmente na métrica* d*, logo com um "padrão" que depende de* d *e, dentro de* Z_0*, pode inclusive formar ciclos limite.*

Detetabilidade também é essencial na demonstração de que controles de horizonte retrocedente com horizonte suficientemente longo é exponencialmente estabilizante, e uma condição sobre o tamanho do horizonte baseada nos parâmetros de detetabilidade foi obtida em um trabalho anterior [2], juntamente com condições para que o custo obtido com tal controle seja arbitrariamente próximo do custo ótimo de horizonte infinito - com estes resultados, combinam-se a facilidade computacional de problemas de horizonte finito com a estabilidade que surge de forma mais imediata (como acima explicado, sinteticamente) nos problemas de horizonte infinito.

3 Resultados principais

Nesta seção mostramos que, dadas as hipóteses de controle não singular e que f e c são Lipschitz, a noção de MF-detetabilidade é equivalente a de MA-detetabilidade.

Iniciamos mostrando que a trajetória de estado de malha fechada, ou controlada, se aproxima da trajetória de malha aberta se o custo for suficientemente pequeno. Considere funções $s_t : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$, $t = 0, 1, \ldots$, tais que $s_t(x) \to 0$ sempre que $x \to 0$, e seja $\bar{d}(u) = \bar{\varphi}(u, 0)$.

Lema 1. *Considere as Hipóteses 1 e 2 (i). Para cada* $\epsilon \geq 0$*, se* $J_u^{n,N}(z) < \epsilon d(z)$ *para algum* $z \in Z$*, então*

$$\varphi(z_t, z_t^0) \leq s_t(\epsilon) d(z), \quad \forall\, n \leq t \leq n + N,$$

sempre que $z_n = z_n^0$*.*

Demonstração. Iniciamos mostrando que, quanto menor o custo, mais próximo de zero é o controle, ou, formalmente: para cada $\epsilon \geq 0$, se $J_u^{n,N}(z) < \epsilon d(z)$ para $z \in Z$, então

$$\bar{d}(u_t) < \frac{\epsilon}{\xi} d(z), \quad \forall\, n \leq t \leq n + N,$$

sendo ξ como na Hipótese 1. A demonstração deste fato segue de

$$\frac{1}{\xi}\epsilon d(z) > \frac{1}{\xi} J_u^{n,N}(z) = \frac{1}{\xi}\sum_{t=n}^{n+N} c_t(z_t, u_t) \geq \frac{1}{\xi}\sum_{t=n}^{n+N} \xi \bar{d}(u_t) \geq \bar{d}(u_t)$$

Tendo este fato em mãos, procedemos a prova da afirmação do lema de maneira indutiva. Uma vez que $z = z_n = z_n^0$, a afirmação vale trivialmente para $t = n$. Agora, considere que a afirmação vale para $t > n$. Utilizando as condições da hipótese Lipschitz juntamente com a avaliação inicial nesta demonstração, avaliamos

$$\begin{aligned}
\varphi(z_{t+1}, z_{t+1}^0) &= \varphi(f(z_t, u_t), f(z_t^0, 0)) \\
&\leq \alpha_f \varphi(z_t, z_t^0) + \beta_f \bar{\varphi}(u_t, 0) \\
&\leq \alpha_f s_t(\epsilon) d(z) + \beta_f \frac{\epsilon}{\xi} d(z) = s_{t+1}(\epsilon) d(z)
\end{aligned}$$

sendo que definimos $s_{t+1}(\epsilon) := \alpha_t s_t(\epsilon) + \beta_f\, \epsilon/\xi$. □

Como se percebe através da afirmação do Lema 1, a trajetória de malha fechada z_t se aproxima da de malha aberta z_t^0 sempre que u é tal que $\epsilon \to 0$ e $z_0 = z$ conjuntamente satisfazem $J_u^{n,N}(z) < \epsilon d(z)$. Até este ponto, não foi empregada a condição Lipschitz em c; com ela, podemos mostra que o custo de malha fechada também se aproxima do custo de malha aberta quando o custo é arbitrariamente pequeno.

Lema 2. *Considere as Hipóteses 1 e 2. Para cada $\epsilon \geq 0$, se z é tal que $J_u^{n,N}(z) < \epsilon d(z)$, então*

$$J_u^{n,N}(z) \geq J_{u\equiv 0}^{n,N}(z) - s(\epsilon) d(z),$$

sendo as funções $s : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$ tais que $s(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

Demonstração. Tomando o resultado do Lema 1, a Hipótese 2 (ii) e fazendo $z_n = z_n^0$, podemos avaliar para $n \leq t \leq n + N$:

$$\begin{aligned}
|c_t(z_t, u_t) - c_t(z_t^0, 0)| &\leq \alpha_c \varphi(z_t, z_t^0) + \beta_c \bar{\varphi}(u_t, 0) \\
&\leq \alpha_c s_t(\epsilon) d(z) + \beta_c \frac{\epsilon}{\xi} d(z) = \bar{s}_t(\epsilon) d(z),
\end{aligned}$$

sendo que definimos $\bar{s}_t(\epsilon) := \alpha_c s_t(\epsilon) + \beta_c \epsilon/\xi$. Como consequência direta, temos que $c(z_t, u_t) \geq c(z_t^0, 0) - \bar{s}_t(\epsilon) d(z)$, permitindo escrever

$$\begin{aligned}
J_u^{n,N}(z) &= \sum_{t=n}^{n+N} c(z_t, u_t) \geq \sum_{t=n}^{n+N} [c(z_t^0, 0) - \bar{s}_t(\epsilon) d(z)] \\
&= \sum_{t=n}^{n+N} c(z_t^0, 0) - d(z) \sum_{t=n}^{n+N} \bar{s}_t(\epsilon) = J_{u\equiv 0}^{n+N}(z) - s(\epsilon) d(z)
\end{aligned}$$

sendo que definimos $s(\epsilon) := \sum_{t=n}^{n+N} \bar{s}_t(\epsilon)$. □

Teorema 1 (MA-detetabilidade e MF-detetabilidade)**.** *Considere controle não singular e sistema e custo Lipschitz, de acordo com as Hipóteses 1 e 2. Seja (Ψ, J) MA-detetável com parâmetros N_d, t_d, δ e γ_{ma}. Então, existe $\gamma > 0$ tal que (Ψ, J) é MF-detetável com parâmetros N_d, t_d, δ e γ.*

Demonstração. Procedemos por contradição. Vamos negar a afirmação do teorema assumindo que nenhum γ satisfaz a condição da definição de MF-detetabilidade, assumindo os demais parâmetros iguais a N_d, t_d, δ. Equivalentemente, consideramos que para cada ϵ arbitrariamente pequeno existe um elemento do espaço de estado no instante de tempo n, $z_n = z_\epsilon$, e um controle u para o qual

$$J_u^{n,N}(z_\epsilon) < \epsilon d(z_\epsilon)$$

e, simultaneamente,

$$d(z_{t_d}) \geq \delta d(z_\epsilon). \tag{4}$$

Nesta situação, utilizamos o resultado do Lema 2 segundo o qual, para cada $\epsilon \geq 0$, se z satisfaz $J_u^{n,N}(z) < \epsilon d(z)$, então $J_u^{n,N}(z) \geq J_{u\equiv 0}^{n,N}(z) - s(\epsilon)d(z)$, sendo $s(\cdot)$ uma função tal que $s(t) \to 0$ quando $t \to 0$. Seja $N = N_d$. Juntamente com estas avaliações, utilizamos (4) na definição de MA-detetabilidade para obter

$$\begin{aligned} \epsilon d(z_\epsilon) > J_u^{n,N_d}(z_\epsilon) &\geq J_{u\equiv 0}^{n,N_d}(z_\epsilon) - s(\epsilon)d(z_\epsilon) \\ &\geq \gamma d(z_\epsilon) - s(\epsilon)d(z_\epsilon) \end{aligned}$$

acarretando $\epsilon + s(\epsilon) > \gamma$, o que é absurdo para ϵ arbitrariamente pequeno. □

Na sequência, consideramos o caso linear quadrático invariante no tempo, ou seja, as seguintes versões do sistema Ψ e do custo c:

$$\begin{aligned} \Psi_\ell : \ z_{t+1} &= Az_t + Bu_t, \quad t \geq 0, \ \ z_0 = z, \\ c_t(z,u) &= z'Qz + u'Ru, \end{aligned} \tag{5}$$

com $Q = Q' \geq 0$ e $R = R' > 0$. Também consideramos, como usual no caso linear quadrático, $Z_0 = 0$ e $d(x) = x'x = |x|^2$. Assumimos que $u_t = 0$, $t \geq 0$, pertence a classe de controles de custo finito $\mathcal{U}_F$ ou, em particular, que o espaço de estado é irrestrito $Z = \mathbb{R}^n$.

O seguinte conceito de detetabilidade é o usual para sistemas lineares invariantes no tempo, vide e.g. [6]. Denotamos por $\lambda(A)$ o maior valor singular de A.

Definição 4. *Dizemos que (Ψ_ℓ, J) é detetável se existir uma matriz L de dimensões apropriadas tal que $|\lambda(A + LQ)| < 1$.*

Lema 3. *No contexto definido em (5), Ψ_ℓ é Lipschtiz e o controle é não singular, satisfazendo as Hipóteses 2 e 1. Se (Ψ_ℓ, J) é detetável, então também é MF-detetável.*

Demonstração. É simples verificar que f e c são Lipschitz: para cada $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} |Az + Bu - Aw - Bv|^2 &= |A(z-w) + B(u-v)|^2 \\ &\leq (1+\epsilon^2)(z-w)'A'A(z-w) + (1+1/\epsilon^2)(u-v)'B'B(u-v) \\ &\leq (1+\epsilon^2)\lambda_+(A'A)|z-w|^2 + (1+1/\epsilon^2)\lambda_+(B'B)|u-v|^2. \end{aligned} \tag{6}$$

No que se refere ao controle singular, temos de imediato $c(z,u) = z'Qz + u'Ru \geq \lambda_-(R)|u|^2$, sendo $\lambda_-(R) > 0$ o menor valor singular de R. Assumindo detetabilidade, temos em [5] uma demonstração que o sistema também é MA-detetável; o Teorema 1 completa a demonstração. □

4 Conclusões

Neste trabalho consideramos sistemas não lineares variantes no tempo e uma relação entre MA-detetabilidade e MF-detetabilidade. Mostramos, a partir de uma extensão de resultados anteriores para o caso invariante no tempo [3], que os parâmetros N_d, t_d e δ podem ser tomados iguais tanto na MF-detetabilidade quanto na MA-detetabilidade, facilitando a obtenção destes parâmetros e a verificação do conceito de MF-detetabilidade. Estes parâmetros aparecem, por exemplo, em estimativas de quão longo deve ser o horizonte para que o controle de horizonte retrocedente seja estabilizante [2]. Como trabalho futuro, sugere-se investigar estimativas para o parâmetro γ da noção de MF-detetabilidade, baseadas nos valores do correspondente γ_{ma} da versão de malha aberta daquele conceito, bem como nos parâmetros constantes nas Hipóteses 1 e 2.

Referências

[1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 19(1):20–32, 1981.

[2] E. F. Costa and J. B. R. do Val. Uniform approximation of infinite horizon control problems for nonlinear systems and stability of the approximating controls. *IEEE Transactions on Automatic Control, accepted*.

[3] E. F. Costa and J. B. R. do Val. Obtaining stabilizing stationary controls via finite horizon cost. *ACC'06 American Control Conference*, 2006.

[4] G. Grimm, M. J. Messina, S. E. Tuna, and A. R. Teel. Model predictive control: for want of a local control lyapunov function, all is not lost. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):546–558, 2005.

[5] W. W. Hager and L. L. Horowitz. Convergence and stability properties of the discrete Riccati operator equation and the associated optimal control and filtering problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14(2):295–312, 1976.

[6] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, 1980.

[7] M. Krichman and E. D. Sontag. Characterizations of detectability notions in terms of discontinuous dissipation functions. *International Journal of Control*, 75:882–900, 2002.

[8] S. Sastry. *Nonlinear Systems: analysis, stability and control*. Springer, 1999.