

Solução da Equação de Laplace pelo Método das Caixas Finitas

Célio Seixo de Brito Júnior e Paulo César Miranda Machado

Escola de Engenharia Elétrica e de Computação, UFG
74001-970, Goiânia, GO

E-mail: celiojunior01@gmail.com e pcesar@eee.ufg.br

RESUMO

Um problema clássico no estudo da eletrostática é o cálculo da distribuição do potencial numa calha metálica retangular e infinitamente longa, onde seu valor é conhecido nas bordas. A solução do problema consiste na resolução da equação de Laplace, sujeita às condições de Dirichlet. Uma técnica numérica comumente utilizada é o Método das Diferenças Finitas [1]. Malhas uniformes são utilizadas pela facilidade de cálculo, porém malhas não-uniformes (Fig. 1a) têm a vantagem de permitir um ganho de tempo nas regiões de malha grossa e maior precisão dos cálculos nas regiões de malha fina. A desvantagem é que a necessidade de um maior refinamento numa área específica do domínio discretizado implica, num maior refinamento em outras áreas onde não é necessário, uma vez que as linhas terminam nas bordas das malhas. Para evitar isso, Franz *et al.* [2] desenvolveram um método que permite que linhas terminem dentro da malha, e não necessariamente nas bordas (Fig. 1b). De acordo com os autores esse método, chamado Método das Caixas Finitas, produziria um considerável ganho de tempo de computação e de espaço de armazenamento das matrizes, devido ao menor número de pontos na malha. A Fig. 1c mostra o esquema de uma caixa finita usado na discretização da equação.

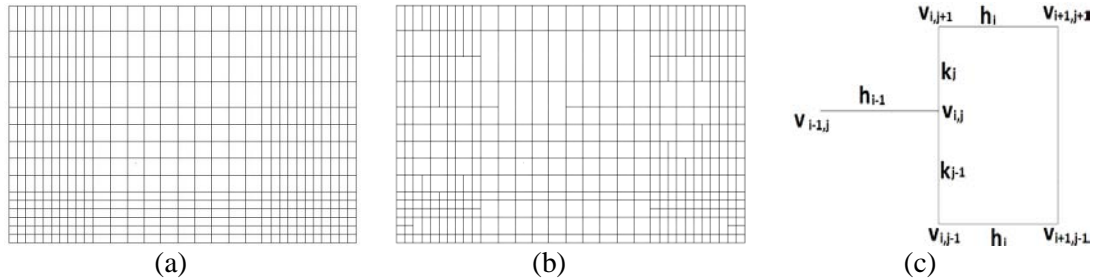


Figura 1. (a) Malha não-uniforme, (b) Malha caixas finitas e (c) Esquema para caixas finitas.

A discretização da equação de Laplace pelo método das diferenças finitas, em duas dimensões, utilizando uma malha retangular não uniforme, resulta na conhecida equação (1) e pelo método das caixas finitas resulta na equação (2):

$$V_{i+1,j} \frac{2}{h_i(h_i+h_{i-1})} + V_{i,j+1} \frac{2}{k_j(k_j+k_{j-1})} + V_{i-1,j} \frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})} + V_{i,j-1} \frac{2}{k_{j-1}(k_j+k_{j-1})} - V_{i,j} \left(\frac{2}{h_i h_{i-1}} + \frac{2}{k_j k_{j-1}} \right) = 0 \quad (1)$$

$$V_{i+1,j+1} \frac{2k_{j-1}}{h_i(h_i+h_{i-1})(k_j+k_{j-1})} + V_{i+1,j-1} \frac{2k_j}{h_i(h_i+h_{i-1})(k_j+k_{j-1})} + V_{i,j+1} \left[\frac{2}{k_j(k_j+k_{j-1})} - \frac{2k_{j-1}}{h_i(h_i+h_{i-1})(k_j+k_{j-1})} \right] + V_{i-1,j} \frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})} + V_{i,j-1} \left[\frac{2}{k_{j-1}(k_j+k_{j-1})} - \frac{2k_j}{h_i(h_i+h_{i-1})(k_j+k_{j-1})} \right] - V_{i,j} \left(\frac{2}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})} + \frac{2}{k_j k_{j-1}} \right) = 0 \quad (2)$$

onde $V_{i,j}$ é o potencial no ponto (i,j) , h_i é o espaçamento na malha em x e k_j é o espaçamento na malha em y . A expressão da malha retangular uniforme é obtida a partir da expressão (1) fazendo-se $h_i = h_{i-1} = h$ e $k_j = k_{j-1} = k$, enquanto a expressão da malha quadrada é obtida a partir da retangular uniforme fazendo-se $h = k$.

Apesar de ser citado como um método poderoso na literatura especializada em simulação de dispositivos semicondutores [3], esse método não teve a repercussão prevista e foi muito pouco utilizado nessa área de estudo. A motivação deste trabalho foi resolver a equação de Laplace

utilizando o método das caixas finitas e comparar seu desempenho com o método das diferenças finitas, em termos de facilidade de implementação, tempo de execução e precisão dos resultados, procurando entender o motivo de sua não utilização em maior escala pelos pesquisadores. Para efeito de comparação, calculamos a distribuição do potencial eletrostático numa calha cuja seção transversal mede 180 x 90 mm, e cujos lados estão submetidos aos potenciais de 20 V (lado superior), 20 V (lado esquerdo), 10 V (lado direito) e 0 V (lado inferior). Na resolução foram utilizadas malhas quadradas, retangulares uniformes, retangulares não-uniformes e caixas finitas. A Fig. 2a mostra a distribuição do potencial eletrostático na seção transversal da calha e a Fig. 2b mostra as linhas equipotenciais, obtidas utilizando-se as malhas citadas.

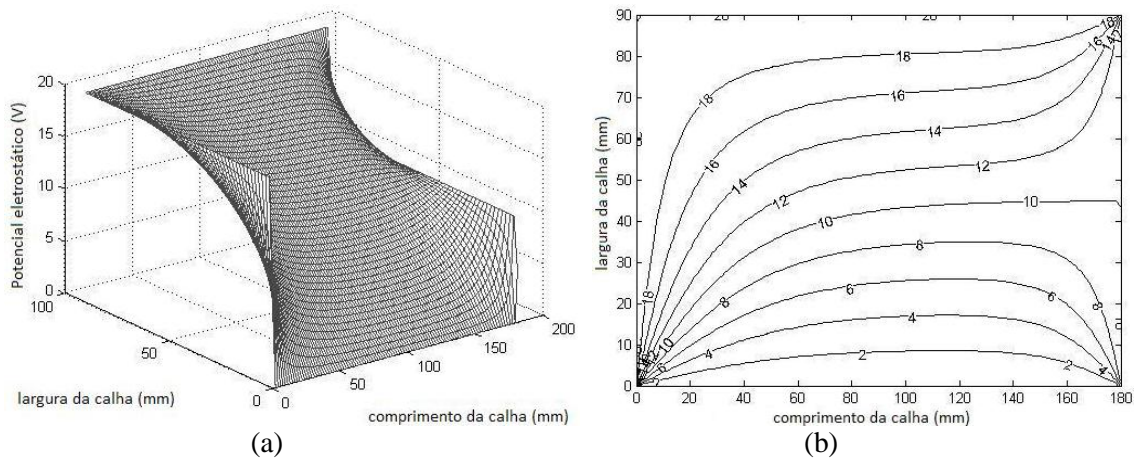


Figura 2. (a) Distribuição do potencial eletrostático na calha e (b) Linhas equipotenciais.

A Tab. 1 mostra o tempo gasto em segundos para gerar os gráficos da Fig. 2, a dimensão do sistema e o maior erro, em porcentagem, obtido comparando-se os resultados da malha retangular uniforme, não-uniforme e caixa finita com a malha quadrada, tomada como referência.

Tabela 1. Tempo gasto, dimensão do sistema e maior erro em porcentagem.

Tipos de malhas	Tempo (seg)	Dimensão do sistema	Erro (%) em relação à malha quadrada
Quadrada	222,69	4851	
Retangular uniforme	73,59	4356	0,012
Retangular não uniforme	39,09	3738	0,28
Caixa finita	29,97	2647	0,62

O Método das Caixas Finitas permitiu a redução do número de pontos da malha, implicando na resolução de um sistema de equações de menor dimensão, gastando, portanto, um tempo menor na execução e com um erro máximo de 0,62 % em relação à malha quadrada.

Comparado com o Método das Diferenças Finitas, o Método das Caixas Finitas é um método mais rápido, mantendo uma ótima precisão (erro menor que 0,62 %), porém a falta de simetria dificulta a geração da malha e do sistema de equações tornando a implementação do programa muito mais trabalhosa e extensa.

Palavras-chave: *Discretizações, Equação de Laplace, Potencial eletrostático*

Referências

- [1] A. O. Fortuna, “Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações”, EDUSP, São Paulo, 2000.
- [2] A. F. Franz, G. A. Franz, S. Selberherr, C. Ringhofer and P. Markowich, Finite boxes – A generalization of the finite-difference method suitable for semiconductor device simulation, IEEE Trans. on Elect. Dev., vol. 30, pp. 1070-1082, (1983).
- [3] C. M. Snowden, “Semiconductor Device Modelling”, Peter Peregrinus, London, 1988.