 ISSN 1984-820X

Uma Aplicação do Teorema da Função Inversa

Ulcilea Alves Severino*
Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: ulcilea0803@hotmail.com

Marcela Luciano Vilela de Souza
Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: marcela@mat.feis.unesp.br

RESUMO

Na Matemática, mais precisamente no Cálculo Diferencial, o Teorema da Função Inversa é um resultado que envolve subconjuntos abertos e aplicações diferenciáveis. O objetivo deste trabalho é estudar uma aplicação do Teorema da Função Inversa. Tal aplicação descreve um critério útil para decidirmos se um dado subconjunto do R^n é uma superfície regular. Apresentaremos alguns resultados, nos quais precisaremos para atingir nossas metas principais.

Definição 1 : Sejam D e E abertos do R^n. Uma bijeção $f : D \longrightarrow E$ é um *difeomorfismo* se é diferenciável e tem inversa diferenciável.

Teorema 1 ***[Teorema da Função Inversa] :*** *Seja $F : U \subset R^n \longrightarrow R^n$ uma aplicação diferenciável e suponha que em $p \in U$ a diferencial $dF_p : R^n \longrightarrow R^n$ é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança V de p em U e uma vizinhança W de $F(p)$ em R^n tal que $F : V \longrightarrow W$ tem inversa diferenciável $F^{-1} : W \longrightarrow V$.*

Definição 2 : Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ definida em um conjunto aberto U de R^n, dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : R^n \longrightarrow R^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in R^m$ de um ponto crítico é chamado um *valor crítico* de F. Um ponto de R^m que não é um valor crítico é chamado um *valor regular* de F.

Definição 3 : Um subconjunto $S \subset R^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em R^3 e uma aplicação $g : U \longrightarrow V \cap S$ de um aberto U de R^2 sobre $V \cap S \subset R^3$ tal que:
1) g é diferenciável.
2) g é um homeomorfismo.
3) (Condição de regularidade) Para todo $q \in U$, a diferencial $dg_q : R^2 \longrightarrow R^3$ é injetiva.

Proposição 1: Seja $f : U \longrightarrow R$ uma função diferenciável em um conjunto aberto U de R^2, então o gráfico de f, isto é, o subconjunto de R^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.

Enunciaremos agora uma Aplicação do Teorema da Função Inversa.

Palavras-chave: *Teorema da Função Inversa, Superfície Regular, Diferencial*

*bolsista de Iniciação Científica FAPESP

Proposição 2 : Se $f : U \subset R^3 \longrightarrow R$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em R^3

Demonstração : Seja $p = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $f^{-1}(a)$. Como a é um valor regular de f, podemos admitir, trocando os nomes dos eixos coordenados se necessário, que $f_z \neq 0$ em p. Definimos uma aplicação $F : U \subset R^3 \longrightarrow R^3$ por $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$,e indicamos por (u, v, t) as coordenadas de um ponto do R^3 onde F toma seus valores. A diferencial de F em p é dada por

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

donde $det(dF_p) = f_z \neq 0$.

Podemos então aplicar o teorema da função inversa, que garante a existência de vizinhanças V de p e W de $F(p)$ tais que $F : V \longrightarrow W$ é inversível e a inversa $F^{-1} : W \longrightarrow V$ é diferenciável. Segue-se que as funções coordenadas de F^{-1}, isto é, as funções $x = u, y = v, z = g(u, v, t), (u, v, t) \in W$, são diferenciáveis. Em particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o plano xy. Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

concluímos que o gráfico de h é $f^{-1}(a) \cap V$. Assim, $f^{-1}(a) \cap V$ é uma vizinhança coordenada de p.

Consequentemente, todo $p \in f^{-1}(a)$ pode ser coberto por uma vizinhança coordenada, e podemos concluir que $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular.

Veremos agora alguns exemplos usando a proposição anterior.

Exemplo 1 : O elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma superfície regular.

De fato, é o conjunto $f^{-1}(0)$, onde $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$ é uma função diferenciável e 0 é o valor regular de f. Isso segue-se do fato das derivadas parciais $f_x = \dfrac{2x}{a^2}, f_y = \dfrac{2y}{b^2}, f_z = \dfrac{2z}{c^2}$ se anularem simultanemente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a $f^{-1}(0)$. Este exemplo inclui a esfera como um caso particular $(a = b = c = 1)$.

Exemplo 2 : O toro é a "superfície"gerada pela rotação de um círculo S^1 de raio r em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo.

Seja S^1 o círculo no plano yz centrado no ponto $(0, a, 0)$. Então S^1 é dado por $(y-a)^2+z^2 = r^2$ e os pontos do conjunto T, obtidos pela rotação deste círculo em torno do eixo Oz satisfazem a equação $z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$.

Consequentemente, T é a imagem inversa de r^2 pela função $f(x, y, z) = z^2+(\sqrt{x^2 + y^2}-a)^2$.

Essa função é diferenciável para $(x, y) \neq (0, 0)$, e como

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

r^2 é um valor regular de f. Segue-se então que o toro T é uma superfície regular.

Referências

[1] R. Courant, *Cálculo Diferencial e Integral* (tradução de Alberto Nunes Serrão e Ruy Honório Bacelar),volumes 1 e 2, Editora Globo, Rio de Janeiro (1966).

[2] Elon Lages Lima, *Curso de Análise* , Volumes 1 e 2, IMPA, Rio de Janeiro (1976).

[3] Manfredo P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática (2005).