 ISSN 1984-820X

Um Algoritmo Estruturado Identificador dos Mergulhos Orientados do Grafo K_n

Dr. João de Deus Lima **Wilken Charles D. Melo***
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - Departamento de Informática
59.610-210, Campus Central, Mossoró, RN
E-mail: jddeus@uol.com, wilkencharles@gmail.com

RESUMO

Intuitivamente, uma superfície topológica Ω é um conjunto de pontos no espaço euclidiano tridimensional, R^3, na qual toda vizinhança de um ponto $P \in \Omega$ é semelhante a um plano. Por exemplo, a esfera S e o toro T são exemplos de superfícies. Diz-se que um grafo G está mergulhado em Ω, $G \hookrightarrow \Omega$, quando os seus lados atendem as duas condições de interseçao: lados distintos nunca se interceptam e só se interceptam em vértices.

Em 1963, W. Gustin [2] introduziu o método do grafo corrente na solução do Problema do Mapa Colorido [3], o qual consiste em obter o esquema do mergulho mínimo do grafo completo K_n, através de sua rotação, munido de uma Lei Corrente de Kirchhoff com elementos distintos do grupo aditivo $Z_m \backslash \{0\}$. Usando este método, foi introduzido um esquema gráfico, chamado de engrenagens de vértices (veja Figura 1), que permite identificar $K_n \hookrightarrow \Omega$ conhecida a sua rotação, quer este seja mínimo ou não. Ao analisar este processo, verificou-se que as identificações podem ser realizadas através de um algoritmo estruturado. O objetivo é desenvolver, a partir de uma rotação de K_n, um algoritmo que determine o conjunto de sequências orbitais, o tipo de partição e o gênero da superfície orientada na qual K_n está mergulhado [1].

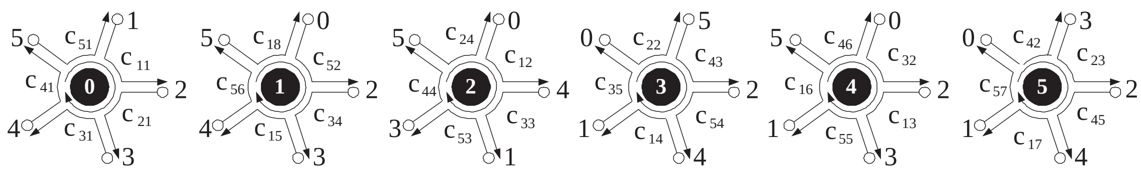

Figura 1: O esquema de engrenagens dos vértices de K_6 no mergulho $K_6 \hookrightarrow 3T$, com rotações $\Theta = \{0(1,2,3,4,5), 1(0,2,3,4,5), 2(0,4,1,3,5), 3(5,2,4,1,0), 4(0,2,3,1,5), 5(0,3,2,4,1)\}$, sequências orbitais $c_1 = (0,2,4,3,1,4,5,1)$, $c_2 = (0,3,5,2)$, $c_3 = (0,4,2,1,3)$, $c_4 = (0,5,3,2,5,4)$ e $c_5 = (0,1,2,3,4,1,5)$ e partição $R_4R_5R_6R_7R_8$

Algoritmo 1 *Seja* $\Theta = \{0(a_{01}, a_{02}, \cdots, a_{0(n-1)}), \cdots, n-1(a_{(n-1)1}, a_{(n-1)2}, \cdots, a_{(n-1)(n-1)})\}$ *o sistema de rotação de* K_n. *A sequência orbital de comprimento* k, $c_1 = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1k})$, *do mergulho* $K_n \hookrightarrow \Omega$ *é dada por:* $c_{11} = a_{01}$, $c_{12} = 0$, c_{13} *é sucessor do* 0 *na rotação do vértice* a_{01}, *o elemento genérico* c_{1j} *é o sucessor de* $c_{1(j-2)}$ *na rotação do vértice* $c_{1(j-1)}$, *e o último elemento* c_{1k}, *é tal que* $(c_{1(k-1)}, c_{1k}) \neq (c_{1i}, c_{1(i+1)})$ *para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ *e* $c_{1(k+j)} = c_{1j}$, *para todo* $j \in \{k+1, k+2\}$. *A sequência orbital* $c_2 = (c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2k_2})$ *é determinada de forma análoga a* c_1, *de tal modo que* (c_{21}, c_{22}) *não está em* c_1. *De modo análogo são determinados as demais sequências orbitais do mergulho* $K_n \hookrightarrow \Omega$.

*bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

Através do Algoritmo 1 foram identificados todos os mergulho de K_n, $n = 3, 4, 5$, estes foram classificados em classes, cada uma formada por mergulhos com o mesmo tipo de partição: os mergulhos de K_4 encontram-se na esfera S e no toro T, sendo uma classe sobre S ($4R_3$) e duas em T (R_3R_9 e R_4R_8). As classes dos mergulhos de K_5 têm a seguinte distribuição: 5 em S com 468 mergulhos, todos de 5 regiões; 15 em $2T$ (bitoro) com 4968 mergulhos, todos de 3 regiões e; uma classe sobre $3T$ (tritoro), sendo esta com 2340 mergulhos, todos de uma região. Ao todo foram identificados 7776 mergulhos distintos, o total dos mergulhos existentes em K_5.

O Algorítmo 1 é aplicável a todo grafo K_n, e é facilmente adaptável para outro tipo de grafo. No caso do K_6, o algoritmo foi testado e se mostrou eficiente exibindo corretamente todos os casos solicitados.

Palavras-chave: *Mergulho de grafo, grafo corrente, superfícies orientadas.*

Referências

[1] J.D. Lima, R. Palazzo Jr., Projetos de modulações sobre superfícies via sistema integrado de transmissão de dados, *TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 3 (2008) 405-416.

[2] W. Gustin, Orientable embedding of Cayley graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963) 272-275.

[3] G.Hingel, J.W.T Young, Solutions of the Weawood map-coloring, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*, 60 (1968) 433-445.