 ISSN 1984-820X

Alguns resultados sobre as Curvas Algébricas Planas

Jaime Edmundo Apaza Rodriguez **Lilian Ferreira Berti**

Depto de Matemática, FEIS, UNESP
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: jaime@mat.feis.unesp.br likaberth@yahoo.com.br

RESUMO

Em $\mathbb{R}^2$, todo conjunto da forma $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, é dito curva algébrica real plana afim. Assim, uma curva algébrica real plana afim é o conjunto de zeros de um polinômio real, não constante, em duas variáveis. É possível esboçar curvas planas reais com a ajuda do computador a efeitos de poder visualizar: existem vários programas de computador que esboçam qualquer equação polinomial em duas variáveis. No entanto, esses esboços não são sempre muito confiáveis, pois pode não existir curva (como no caso $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$), ou se reduzir a um ponto (como no caso $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0$). Por outro lado, esses esboços não são muito precisos em volta de pontos singulares da curva, quando tiver. Tudo isto permite afirmar que é necessário ter alguns resultados teóricos acerca das curvas algébricas reais planas.

Neste trabalho apresentamos aspectos elementares sobre as curvas algébricas planas, tanto afins quanto projetivas, usando conceitos basicamente algébricos. Destacamos que uma curva projetiva é o fecho de uma curva afim. Para o estudo de uma curva real, afim ou projetiva, será útil examiná-la sobre o corpo dos números complexos.

Seja o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. As curvas algébricas planas sobre $\mathbb{K}$ podem ser localizadas no plano afim ou no plano projetivo, sendo que no plano afim são esboçados os problemas de tipo local e, no plano projetivo, os problemas de tipo global.

Um conjunto algébrico no espaço afim $\mathbb{K}^n$ é qualquer conjunto da forma

$$V_{\mathbb{K}} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \cdots, f_s(x_1, \cdots, x_n) = 0\},$$

para algum $s \in \mathbb{N}$ e alguns polinômios $f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Este conjunto é dito também conjunto de zeros de $f_1, \cdots, f_s$ em $\mathbb{K}^n$.

É válida a igualdade seguinte:

$$V_{\mathbb{K}}(f_1, \cdots, f_s) = V_{\mathbb{K}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{K}}(f_s).$$

As propriedades a seguir são fácilmente verificáveis:

1) $V_{\mathbb{K}}(f) = \mathbb{K}^n$ se e somente se $f = 0$.
2) $V_{\mathbb{K}}(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathbb{K} - \{0\}$.
3) $V_{\mathbb{K}}(f_1 f_2) = V_{\mathbb{K}}(f_1) \cup V_{\mathbb{K}}(f_2)$. Em particular, se f_1 divide f_2 então $V_{\mathbb{K}}(f_1) \subseteq V_{\mathbb{K}}(f_2)$.
4) Cada subconjunto finito de $\mathbb{K}^n$ é algébrico.

Um conjunto algébrico $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{K}^n$ é dito irredutível se não pode ser decomposto na união de dois conjuntos algébricos próprios, ou seja, se $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ então $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$, onde $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são conjuntos algébricos em $\mathbb{K}^n$.

Uma curva algébrica plana afim sobre $\mathbb{K}$ é, por definição, o conjunto de zeros em $\mathbb{K}^2$ de um polinômio não constante $f \in \mathbb{K}[x, y]$. Dizemos então que f se anula sobre $\mathcal{C}$. Uma curva $V_{\mathbb{K}}(f)$

é irredutível se é irredutível como conjunto algébrico. Esta é a definição mais simples possível de curva algébrica. Em um estado posterior, a definição de curva pode ser extendida de modo a permitir multiplicidades. Isto é necessário, por exemplo, quando se estudam famílias de curvas, tais como os sistemas lineares.

Alguns resultados conhecidos são apresentados a seguir.

Teorema 1: Toda curva algébrica plana complexa $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ tem infinitos pontos.

Este resultado se deduz do teorema fundamental da álgebra. Para isso, basta intersectar a curva $\mathcal{C}$ com uma família infinita de retas complexas paralelas e observar que existem pontos em cada interseção, exceto para um número finito de retas.

Teorema 2: Toda curva algébrica plana complexa $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ possui um polinômio minimal f.

Isto significa que todo polinômio que se anule em $\mathcal{C}$, tem que ser múltiplo de f. Tal polinômio minimal f é único, salvo multiplicação por constante não nula e se escreve $\mathcal{C} = V_{\mathbb{C}}(f)$. O grau de f é dito o grau de $\mathcal{C}$.

Segue assim um famoso resultado sobre o número de pontos de interseção de duas curvas.

Teorema de Bézout: (*Étienne Bezout (1739-1783)*) Duas curvas algébricas planas complexas, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, sem componentes irredutíveis em comum, com graus m e n respectivamente, se interesectam em j diferentes pontos, com $0 < j \leq mn$.

De fato, se as curvas são projetivas e os pontos de interseção são contados com suas correspondentes multiplicidades, então $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se intersectam em exatamente mn pontos.

Exemplo: O conjunto vazio é uma curva algébrica real. Este conjunto é o conjunto de zeros de, por exemplo, $y^2 + 1 \in \mathbb{R}[x, y]$ ou $x^2 + (x-1)^2 \in \mathbb{R}[x, y]$. No entanto, considerando sobre o corpo dos números complexos, temos que $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}(y^2 + 1)$ e $V_{\mathbb{C}}(x^2 + (x-1)^2)$ são uniões de duas retas paralelas.

Palavras-chave: *Curva algébrica, Teorema de Bézout, Plano Afim, Plano Projetivo.*

Referências Bibliográficas

[1] *Vainsencher, I.*, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[2] *Fitchett S.*, *Bezout's Theorem: A Taste of Algebraic Geometry*, Florida Atlantic University Honors College.

[3] *De la Puente, M. J.*, *Real Plane Algebraic Curves*, Departamento de Algebra, Universidade Complutense, Madrid, España, 1991.

[4] *Fischer G*, *Plane Algebraic Curves*, Student Mathematical Library, Vol. 15, AMS - American Mathematical Society.