ISSN 1984-820X

Aspectos Algébricos das Curvas Afins e das Curvas Projetivas

Jaime Edmundo Apaza Rodriguez **Larissa Marques Sartori**

Depto de Matemática, FEIS, UNESP
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: jaime@mat.feis.unesp.br larasartory@hotmail.com

RESUMO

Todo conjunto da forma $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ é dito curva algébrica real plana, onde $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$. Assim, uma curva algébrica plana real é o conjunto de zeros de um polinômio real não constante em duas variáveis. É possível esboçar curvas planas reais com a ajuda do computador. Existem vários programas de computador que esboçam qualquer equação polinomial em duas variáveis. No entanto, esses esboços não são sempre muito confiáveis, pois pode não existir curva (como no caso $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$), ou se reduzir a um ponto (como no caso $f(x,y) = x^2 + y^2 = 0$). Por outro lado, esses esboços não são muito precisos em volta de pontos singulares da curva, se ela tiver. Por isso e outras razões são necessários alguns resultados teóricos acerca das curvas algébricas reais planas.

Neste trabalho apresentamos aspectos elementares sobre as curvas algébricas planas, tanto afins quanto projetivas, usando conceitos basicamente algébricos. Destacamos que uma curva projetiva é o fecho projetivo de uma curva afim.

Seja o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto algébrico no espaço afim $\mathbb{K}^n$ é qualquer conjunto da forma

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \cdots, f_s(x_1, \cdots, x_n) = 0\},$$

para algum $s \in \mathbb{N}$ e alguns polinomios $f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Este conjunto é dito também conjunto de zeros de $f_1, \cdots, f_s$ em $\mathbb{K}^n$.

Um conjunto algébrico $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{K}^n$ é dito irredutível se não pode ser decomposto na união de dois conjuntos algébricos próprios, ou seja, se $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ implica $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$, onde $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são conjuntos algébricos em $\mathbb{K}^n$.

Uma curva algébrica plana afim C sobre $\mathbb{K}$ é, por definição, o conjunto de zeros em $\mathbb{K}^2$ de um polinômio não constante $f \in \mathbb{K}[x,y]$. Dizemos então que f se anula sobre C. Uma curva C é irredutível se é irredutível como conjunto algébrico. Esta é a definição mais simples possível de curva algébrica. Em um estado posterior, a definição de curva pode ser extendida de modo a permitir multiplicidades. Isto é necessário, por exemplo, quando se estudam famílias de curvas, tais como os sistemas lineares.

Exemplo: Para cada $c \in \mathbb{K}$, considere o polinômio$f_c = x^2 + 2cxy + y^2 \in \mathbb{K}[x,y]$. Então a curva $C = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f_c) \subseteq \mathbb{R}^2$ é, ou o ponto $(0,0)$, ou uma reta ou a união de duas retas, segundo seja $|c| < 1$, $|c| = 1$ ou $|c| > 1$ respectivamente. Para verificar isto observar que pode-se escrever o polinômio f_c na forma $f_c = (x+cy)^2 + (1-c^2)y^2$. Assim, se $|c| < 1$, obtemos o ponto $(0,0)$ como única solução de $f_c = 0$. Se $|c| = 1$ temos $f_c = (x+cy)^2 = 0$, de onde resulta a reta $x + cy = 0$. E finalmente, se $|c| > 1$, teremos as retas $x + (-c^2 + c + 1)y = 0$ e $x + (c^2 + c - 1)y = 0$. Agora, considerando a curva sobre o corpo dos números complexos, temos que $C' = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(f_c) \subseteq \mathbb{C}^2$ é a união de duas retas (possivelmente iguais), para todo $c \in \mathbb{C}$.

Alguns resultados conhecidos são apresentados a seguir e podem ser vistos em [3].

Teorema 1: Toda curva algébrica plana complexa $C \subset \mathbb{C}^2$ tem infinitos pontos.

Este resultado se deduz do *Teorema Fundamental da Álgebra.* Para isso basta intersectar a curva $\mathcal{C}$ com uma família infinita de retas complexas paralelas e observar que existem pontos em cada interseção, exceto para um número finito de retas.

Teorema 2: Toda curva algébrica plana complexa $C \subset \mathbb{C}^2$ possui um polinômio minimal f.

Isto significa que todo polinômio que se anule em C tem que ser múltiplo de f. Tal polinômio minimal f é único, salvo multiplicação por constante não nula e se escreve $C = V_{\mathbb{C}}(f)$. O grau de f é dito o grau de C.

A seguir apresentamos um clássico resultado sobre o número de pontos de interseção de duas curvas.

Teorema de Bézout: (*Étienne Bezout (1739-1783)*) Duas curvas algébricas planas complexas, C_1 e C_2, sem componentes irredutíveis em comum, com graus m e n respectivamente, se interesectam em j diferentes pontos, com $0 < j \leq mn$.

De fato, se ambas as curvas são projetivas e os pontos de interseção são contados com suas correspondentes multiplicidades, então C_1 e C_2 se intersectam em exatamente mn pontos.

Exemplo 1: A multiplicidade de interseção das curvas $C_1 : y = x^3$ e $C_2 : y = 0$ na origem (único ponto de interseção) é 3. Por outro lado, a multiplicidade de interseção das curvas $C_1 : y = x^2$ e $C_2 : x = 1$ no ponto $(1, 1)$ (cuja versão projetivizada é $(1 : 1 : 1)$) do plano afím é 1. O outro ponto de interseção é o ponto no infinito $(0 : 1 : 0)$, sendo a multiplicidade de interseção também 1.

Exemplo 2: Considere as curvas $C_1 : x^2 - y^2 = 1$ e uma de suas assíntotas $C_2 : y = x$. É claro que não existem pontos de interseção na parte afím. Homogenizando ambas as curvas obtemos $X^2 - Y^2 = Z^2$ e $Y = X$, cujo ponto de interseção é $(1 : 1 : 0)$, com multiplicidade 2.

Como observado, foi feito um estudo suscinto das curvas algébricas planas, considerando fundamentalmente o Teorema de Bezout, destacando algumas propriedades básicas sobre o corpo dos números complexos, considerando tanto a parte afim quanto a parte projetiva.

Palavras-chave: *Curva algébrica, Multiplicidade de interseção, Teorema de Bézout, Plano Afim, Plano Projetivo.*

Referências Bibliográficas

[1] *Vainsencher, I.*, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[2] *Fitchett S.*, *Bezout's Theorem: A Taste of Algebraic Geometry*, Florida Atlantic University Honors College.

[3] *De la Puente, M. J.*, *Real Plane Algebraic Curves*, Departamento de Algebra, Universidade Complutense, Madrid, España, 1991.

[4] *Fischer G*, *Plane Algebraic Curves*, Student Mathematical Library, Vol. 15, AMS - American Mathematical Society.