# Um Estimador de Erro *a posteriori* Baseado em Resíduo dos Elementos para Equação do Transporte de Contaminante em Regime de Pequena Advecção

**Alessandro Firmiano**
Depto. de Hidráulica e Saneamento, SHS/EESC/USP
13560-970, São Carlos, SP
E-mail: lezandro@sc.usp.br

**Edson Wendland**
Depto de Hidráulica e Saneamento, SHS/EESC/USP
13560-970, São Carlos, SP
E-mail: ew@sc.usp.br

## RESUMO

Modelos computacionais que implementam a migração de soluto em meio poroso saturado surgem constantemente na comunidade científica devido à suma importância dada à compreensão e previsão do transporte de constituintes dissolvidos em água subterrânea.

A confiabilidade nos resultados obtidos das complexas operações provenientes da dinâmica de fluídos computacional [1] pode ser mensurada por estimadores de erro *a posteriori*. Neste trabalho é apresentado um indicador elemento residual do estimador de erro do modelo (1.1), Advecção-Dispersão-Reação (ADR), considerando o transporte em regime de pequena advecção [4].

$$\begin{cases} \partial_t C - div(\mathbf{D}\nabla C) + \mathbf{v}\cdot\nabla C + \lambda C = f & \text{em } \Omega \text{ x } (0,T] \\ C = C_D & \text{sobre } \Gamma_D \text{ x } (0,T] \\ \mathbf{n}\cdot D\nabla C = g & \text{sobre } \Gamma_N \text{ x } (0,T] \\ C = C_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Para a discretização temporal empregou-se o esquema $\theta$A-estável e para a discretização espacial foi usado o método de elementos finitos com elemento conforme e formulação de Galerkin. O estimador residual apresentou boa eficiência local quando a solução numérica do modelo ADR 2D foi comparada com solução analítica disponível na literatura [2]. Ou seja, em nível do elemento, o estimador encontra-se limitado inferiormente pelo erro atual.

A norma $L^2$ do indicador elemento residual (1.2),

$$\begin{aligned} R_K = f_{\mathrm{I}} - \frac{1}{\tau_n}\left(C^n_{\mathrm{T}_n} - C^{n-1}_{\mathrm{T}_{n-1}}\right) + div\left(D^n\nabla(\theta C^n_{\mathrm{T}_n} + (1-\theta)C^{n-1}_{\mathrm{T}_{n-1}})\right) \\ - \mathbf{v}^n\cdot\nabla\left(\theta C^n_{\mathrm{T}_n} + (1-\theta)C^{n-1}_{\mathrm{T}_{n-1}}\right) - \lambda^n\left(\theta C^n_{\mathrm{T}_n} + (1-\theta)C^{n-1}_{\mathrm{T}_{n-1}}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

implementada em linguagem JAVA, é determinada utilizando os pontos de Gauss do elemento quadrilátero delimitado pelas funções de base em coordenadas locais $\Phi_j = \frac{1}{4}(1-\xi_j\xi)(1-\eta_j\eta)$ [3].

Em regime de pequena advecção, coerente ao campo de velocidades do fluxo de água subterrânea, os resultados de exemplos numéricos dos processos ADR demonstraram a robustez e eficiência da técnica residual para estimar o erro espacial da solução numérica. Na situação de fluxo não uniforme, observou-se a convergência da solução numérica, uma vez que a norma $L^2$ do resíduo global decresce linearmente mediante o acréscimo nos passos de tempo ou refinamento da malha inicial. Desta forma, o indicador (1.2) da equação parabólica (1.1) pode ser utilizado em estratégias de refinamento adaptativo para particionar uma malha de elementos finitos e fornecer uma solução numérica com a precisão desejada.

**Palavras-chave**: *estimador de erro, transporte de soluto, água subterrânea, elemento finito*

**Referências**

[1] M. A. Hossain, A. S. Miah, "Crank-Nicolson-Galerkin model for transport in groundwater: Refined criteria for accuracy", Applied Mathematics and Computation, 105 pp 173-181, 1999

[2] B. P. Kumar, G. R. Dodagoudar, "Two-dimensional modeling of contaminant transport trough saturated porous media using the radial point interpolation method (RPIM)", Hydrogeology Journal, 16 pp 1497-1505, 2008

[3] N. Kresic, "Hydrogeology and Groundwater Modeling", CC Press 2a. ed , 2006.

[4] R. Verfürth "Adaptive Finite Element Methods Lecture Notes Winter Term 2007/08" Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Deutschland, 2008