

## Aperfeiçoamento de Técnicas Implícitas na Simulação de Escoamentos Viscoelásticos (modelo SXPP) com Superfície Livre

**Cassio M. Oishi**

Depto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP,  
12231-280, São José dos Campos, SP  
E-mail: cassiooishi@gmail.com

**Fernando P. Martins**

**José A. Cuminato**

Depto de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP  
13566-590, São Carlos, SP  
E-mail: fernandopacanellimartins@gmail.com, jacumina@icmc.usp.br

### **RESUMO**

Entre os diversos modelos viscoelásticos existentes, um bastante recente é o Pom-Pom [7], baseado na representação da molécula polimérica na forma de tubo, constituindo sua coluna vertebral, nos extremos da qual existe um dado número de ramificações (braços). Um aprimoramento deste modelo foi o XPP (eXtended Pom-Pom), proposto em [12].

Neste trabalho, estamos interessados na versão Single do modelo XPP, denominada SXPP. Assim, ampliamos as técnicas propostas em [8], criando uma metodologia que permite a simulação de escoamentos viscoelásticos com superfície livre modelados pela equação constitutiva SXPP, denominada GENSMAC-SXPP [6], a qual foi implementada no Sistema Freeflow2D [4].

As equações do momento e da continuidade são resolvidas por um método de projeção [2], desacoplando a velocidade e a pressão. A contribuição não-newtoniana é inserida nas equações de Navier-Stokes incompressíveis pela formulação EVSS [10]. As corretas condições de contorno são impostas na superfície livre [3].

Com base no método MAC [5], as equações são discretizadas por diferenças finitas em uma malha deslocada. A equação de quantidade de movimento é discretizada de forma semi-implícita (Euler Implícito e Crank-Nicholson). Já a equação que define a contribuição não-newtoniana é integrada por um método Runge-Kutta de segunda ordem. Os termos convectivos não-lineares são aproximados pelo esquema *upwind* convergente de alta ordem CUBISTA [1].

A pressão sobre a superfície livre é calculada pela eficiente estratégia implícita proposta em [9]. A combinação da estratégia semi-implícita para a equação do momento juntamente com o cálculo implícito da pressão na superfície livre resulta em um método que elimina a restrição de estabilidade parabólica ao passo temporal, o que é muito importante em escoamentos a baixos Reynolds ( $Re \ll 1$ ).

A superfície livre, representada por uma sequência de partículas marcadoras, é movimentada por um esquema Runge-Kutta de segunda ordem, o qual tem se mostrado [6] bastante preciso (no que diz respeito à manutenção da massa computacional) se comparado ao esquema utilizado em [8].

Os sistemas lineares resultantes da discretização das equações de quantidade de movimento e de Poisson são esparsos e de grande porte. Assim, são resolvidos pelo BiCGstab com o pré-

condicionador SOR [11], sendo esta uma escolha que se mostrou bastante eficiente para a classe de problemas de interesse [6].

Assim, uma série de simulações de problemas complexos com superfície livre (como o *fountain flow*, o *extrudate swell*, o *impacting drop* e o *jet buckling*) foi realizada, comprovando a robustez e precisão da metodologia desenvolvida.

**Palavras-chave:** *superfície livre, escoamentos viscoelásticos, modelo SXPP*

## Referências

- [1] M. Alves, P. Oliveira, F. Pinho, A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41 (2003) 47-75.
- [2] D.L. Brown, R. Cortez, M.L. Minion, Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comp. Phys.*, 168 (2001) 464-499.
- [3] G. K. Batchelor, "An Introduction to Fluid Dynamics", CUP, 1967.
- [4] A. Castelo, M. Tomé, M.L. César, J. Cuminato, C. Mckee, Freeflow: an integrated simulation system for three-dimensional free surface flows, *Comput. Vis. Sci.*, 2 (2000) 199-210.
- [5] F. Harlow, J. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, 8 (1965) 2182-2189.
- [6] F.P. Martins, "Desenvolvimento de um método numérico implícito para a simulação de escoamentos viscoelásticos com superfícies livres", Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2009.
- [7] T.C.B. McLeish, R.G. Larson, Molecular constitutive equations for a class of branched polymers: The pom-pom polymer, *J. Rheol.*, 42 (1998) 101-110.
- [8] C. M. Oishi, J. A. Cuminato, V.G. Ferreira, M. Tomé, A. Castelo, N. Mangiavacchi, S. McKee, A stable semi-implicit method for free surface flows, *J. of Applied Mech.*, 73 (2006) 940-947.
- [9] C.M. Oishi, J.A. Cuminato, M. Tomé, S. McKee, An Implicit Technique for Solving 3D Low Reynolds Number Moving Free Surface Flows, *J. Comp. Phys.*, 227 (2008) 7446-7468.
- [10] D. Rajagopalan, R. Armstrong, R. Brown, Finite element methods for calculation of steady viscoelastic flow using constitutive equations with newtonian viscosity, *J. Non-Newtonian Fluid. Mech.*, 36 (1990) 159-192.
- [11] Y. Saad, "Iterative methods for sparse linear systems", 2 ed., 2000.
- [12] W.M.H. Verbeeten, G.W.M. Peters, F.T.P. Baaijens, Differential constitutive equations for polymer melts: the extended Pom-Pom model, *J. Rheol.*, 45 (2001) 823-843.