 ISSN 1984-820X

Interpolação de dados usando Funções de Base Radiais

Gilcélia R. Souza* **Sônia M. Gomes**
Unicamp - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
13083-859, Campinas, SP
E-mail: gilcelia@ime.unicamp.br soniag@ime.unicamp.br

RESUMO

Funções de base radiais (RBF) são populares quando o problema se trata de aplicações multidimensionais que requerem a interpolação de dados provenientes de amostras não uniformes. Um aspecto fundamental em um esquema de aproximação por bases radiais é que a construção de uma malha não é necessária. Uma função radial depende somente da distância a um dado centro. Sendo assim, a única propriedade geométrica utilizada refere-se à distância entre dois pontos, o que é fácil de ser calculada, em qualquer dimensão.

No contexto de RBF as funções aproximantes são, tipicamente, da forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(||x - x_j||) + p(x), x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

em que $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $||\cdot||$ denota a norma Euclidiana e $p \in \Pi_m^d$ é um polinômio de grau m, sujeito à restrição $\sum_{j=1}^N \lambda_j p(x_k) = 0$ para todo $p \in \prod_m^d$. Abaixo listamos as RBF's mais comuns com as respectivas ordens da parte polinomial p.

Thin Plate Splines	$\phi = r^2 log(r)$	$m = 2$
Multiquádricas	$\phi = \sqrt{(r^2 + c^2)}$	$m = 1$
Gaussianas	$\phi = e^{-r^2}$	$m = 0$
Multiquádricas Inversa	$\phi = (r^2 + c^2)^{-1/2}$	$m = 0$
Base de suporte compacto	$\phi = (1 - r)_+^4(4r + 1)$	$m = 0$

Seja $X = \{x_1, \cdots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto de centros distintos e $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função a ser aproximada, supondo que sejam dados os seus valores pontuais $f(x_1), \cdots, f(x_N)$. Uma maneira de se fazer isto é utilizar um esquema de interpolação que consiste em construir uma função $s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ que satisfaça a condição $s(x_k) = f(x_k), \quad 1 \leq k \leq N$. Supondo que $\Pi_m^d = \text{span}\{p_1, \cdots, p_q\}$, e que $s(x)$ se expressa como na equação (1), então o vetor contendo os coeficientes $\lambda = (\lambda_j) \in \mathbb{R}^N$ e $\mu = (\mu_k) \in \mathbb{R}^q$, é calculado pela resolução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} A_{X,\phi} & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que $A_{X,\phi} = (\phi(||x_j - x_k||)_{1 \leq j,k \leq N}$ e $P = (p_l(x_j))_{1 \leq j \leq N; 1 \leq l \leq q}$. Este problema é bem-posto para os casos de ϕ indicados acima (c.f. [1], [4]).

Dependendo da aplicação, são de interesse esquemas de aproximação RBF em multinível [2, 3], em que considera-se uma sequência encaixante de pontos $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_M = X$

*UEMA-Departamento de Matemática e Estatítica.

e constrói-se um esquema de interpolação em M passos. Começando com $k = 1$, no k-ésimo passo calcula-se o resíduo $f - (s_1 + \cdots + s_{k-1})$ sobre X_k e calcula-se o k-ésimo interpolante $s_k(x) = \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_j^{(k)} \phi_{\alpha_k}(||x - x_j^{(k)}||) + p^{(k)}(x)$, em que $\alpha_k > 0$ são parâmetros de escalonamento escolhidos adequadamente. Precisamente, o algoritmo correspondente tem a forma:

$$\begin{array}{rcl} s_1|_{X_1} & = & f|_{X_1} \\ s_2|_{X_2} & = & (f - s_1)|_{X_2} \\ & \vdots & \\ s_M|_{X_M} & = & \left(f - \sum_{k=1}^{M-1} s_k\right)|_{X_M} \end{array}$$

Como resultado deste algoritmo, tem-se que $s = s_1 + \cdots + s_M$ interpola f em cada centro de X. A principal idéia desta estratégia é capturar as características básica da função nos primeiros passos e agregar oa detalhes mais finos somente nos níveis superiores.

No presente estudo, consideram-se esquemas de interpolação para a função de Franke

$$f(x,y) = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}(9x-2)^2-\frac{1}{4}(9y-2)^2} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{49}(9x-2)^2-\frac{1}{10}(9y-2)^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(9x-7)^2-\frac{1}{4}(9y-3)^2} - \frac{1}{4}e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2},$$

definida no quadrado unitário $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Para o esquema em multinível considera-se a sequência diádica $X_k = \{x_{i,j}^k = 2^{-k}(i,j),\ 0 \leq i,j \leq 2^k\}$ de quatro níveis $2 \leq k \leq 5$. Para o cálculo dos erros, em todos os níveis considera-se a malha de referência X^6.

Como exemplo, usando a RBF com suporte compacto, utilizam-se bases re-escalonadas $\phi_\alpha(r) = \phi(\frac{r}{\alpha})$ onde $\alpha > 0$. Considerando a malha uniforme $X = X^5$, o parâmetro $\alpha_5 = 1.2$ é o que fornece o melhor erro de aproximação 7.741×10^{-4}. Nos níveis inferiores, os valores usados para o parâmetro de escalonamento são $\alpha_k = 2\alpha_{k+1}$. Os resultados dos erros $e_k = ||f - (s_1 + \cdots + s_k)||_\infty$ obtidos pelo esquema multinível são: $e_2 = 7.211 \times 10^{-2}$, $e_3 = 3.939 \times 10^{-2}$, $e_4 = 1.820 \times 10^{-3}$ e $e_5 = 4.389 \times 10^{-4}$. A Figura 1 mostra as aproximações $s = s_1$ e $s = s_1 + s_2$ e os respectivos erros.

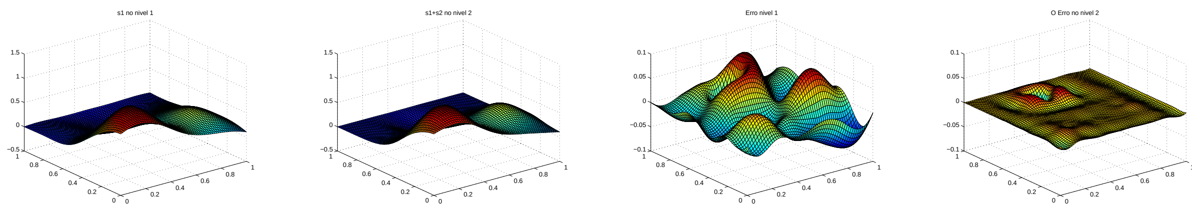

Figura 1: Aproximações $s = s_1$, $s = s_1 + s_2$ e os correspondentes erros

O trabalho a ser apresentado consiste no estudo dos esquemas de interpolação apresentados, para todas as RBF mencionadas em malhas não estruturadas, bem como de outros métodos de aproximação utilizando o critério dos mínimos quadrados.

Referências

[1] M. D. Buhmann, *Radial basis functions: Theory and Implementations* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2003.

[2] G. E. Fasshauer, *Newton Iteration with Multiquadrics for the solution of Nonlinear PDEs.* Numerical Algorithms 25: 181-195, 2000.

[3] M.S. Floater e A. Iske, *Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions* J. Comp. Appl. Mathm. 73: 65-78, 1996.

[4] C. A. Michelli, *Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions.* Constr. Approx. 2: 11-22, 1986.