Modelos estatísticos para a composição de uma Carteira de Investimentos

Berenice Camargo Damasceno
Departamento de Matemática, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FE/IS, UNESP
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: berenice@mat.feis.unesp.br

Evail Salmen Vidal
Departamento de Engª Elétrica - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS - UNESP
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: evailvidal@yahoo.com.br

Bruno Pereira Navarro Macedo
Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FE/IS, UNESP
15385-000, Campus Ilha Solteira, Ilha Solteira, SC.
E-mail: bruno71075@aluno.feis.unesp.br

RESUMO

Com o avanço da tecnologia, incluindo a Internet, muitas corretoras desenvolvem sites amigáveis de vendas [1] atingindo várias camadas da população. Um dos mercados mais interessantes é o mercado financeiro de ações, e neste mercado todos buscam meios de prever seu comportamento, minimizando riscos e maximizando retornos.
Em 1952, Harry M. Markowitz propôs um modelo quantitativo através da média (relacionado ao retorno)-variância (relacionada ao risco) em período único de carteiras de investimento [4]. Este trabalho foi o início de outros estudos do mercado de ações. Dentre os trabalhos que sucederam o de Markowitz, temos, os modelos gerais para equilíbrio de Mercado, tipo CAPM (Capital Asset Pricing Model) de Sharpe e APT (Arbitrage Pricing Model) de Ross.
O objetivo deste trabalho é fazer um levantamento não exaustivo dos principais estudos decorrentes da idéia de Markowitz [3,4,5]. Pretendemos também fazer uma comparação entre alguns dos modelos estudados, utilizando simulações para obtermos conclusões e possível escolha do mais adequado para a composição de um portfólio no mercado de ações. Para tanto, estamos realizando um estudo especifico dos tópicos matemáticos que são os pilares básicos da teoria de Markowitz (e que a partir dele são também pilares básicos da teoria de mercado): medidas estatísticas centrais (média, variância, co-variância) em composições; método de procura de máximos e mínimos em conjuntos de restrições para funções de uma ou várias variáveis (derivação e métodos do tipo multiplicadores de Lagrange); aspectos geométricos em curvas no plano para o design de elementos da teoria: fronteira eficiente, pontos de risco mínimo e demais elementos necessitados de interpretação que surgirem.

Segundo a teoria básica de Markowitz para um investidor obter sucesso é necessário essencialmente: 1) montar um conjunto de ações de empresas em setores econômicos diferentes. Isto caracteriza uma Carteira de Investimento. O intuito desta diversificação é gerar uma balança de retornos, pois se um setor econômico estiver em queda, outro setor pode estar em alta, ou seja, a perda de um setor pode ser compensada com a elevação dos preços do outro (este fato está ligado fundamentalmente à medida de correlação entre os ativos) (e 2) re-equilibrar periodicamente a proporção entre os ativos que compõem a carteira, através da consideração da história dos retornos de cada ativo e os cálculos próprios da teoria (de Markowitz) baseados essencialmente em modelos de otimização, tipo multiplicadores de Lagrange [2].
Estes dois princípios podem ser tratados numa Carteira P de diversificação mínima (i.é. composta de dois ativos A e B).
1º) no plano de Markowitz, risco × retorno, a curva de composição dos dois ativos é mostrada na Figura 1.

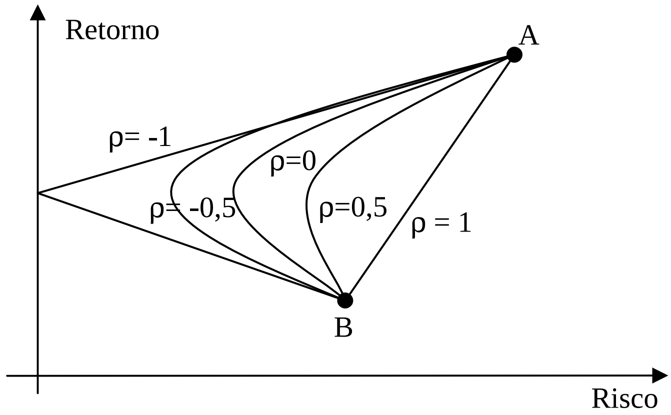

Figure 1: curva para a composição de A e B.

A curva da Figura 1 nos mostra claramente que quanto menor relativamente for a correlação das tabelas de retorno dos ativos A e B menores serão os riscos.
2º) o equilíbrio das proporções de A e B na carteira denotada (com proporção x de A), por **P= x A + (1 - x) B ,** é determinado seguindo uma estratégia de risco × retorno, segundo as igualdades para o retorno e variância de P:

$$\overline{R_P} = x\,\overline{R_A} + (1-x)\,\overline{R_B} \quad \text{e} \quad \sigma_P^2 = x^2\,\sigma_A^2 + (1-x)^2\,\sigma_B^2 + 2x(1-x)\,\sigma_{AB}$$

onde σ_{AB} é a covariância entre A e B. Observe-se que o máximo retorno possível em P é o maior dentre os retornos de A e B. Usando as derivadas de 1ª e de 2ª ordem na função positiva $\sigma_P^2(x)$, vemos que o mínimo desta função é dado por: $x_0 = \dfrac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}$ **,**

que será a proporção do ativo A em P para termos o risco mínimo $\sqrt{\sigma_P^2(x_0)}$ na carteira.
Se a Carteira P for composta de três ou mais ativos a composição é obtida com o uso do método dos Multiplicadores de Lagrange [2], pois teremos no mínimo duas variáveis de proporção para a composição.

Utilizamos neste trabalho os dois ativos, A e B, na carteira P, com o objetivo de uma introdução mais simples, mas com os elementos mais relevantes da teoria de Markowitz. Esses elementos são os que se referem à escolha dos ativos que comporão a carteira além da estratégia de re-alinhamento das proporções na carteira ao longo do tempo.

Palavras-chave: *Markowitz, Média-variância, Carteira de Investimento, Modelos de otimização.*

Referências

[1] Bolsa de Valores de São Paulo: Bovespa www.bovespa.com.br.
[2] Damasceno, B.C. "Ordonnancement des systèmes de production multi-ressources avec la prise en compte de blocage". Tese de Doutorado (*em francês*), Universidade de Metz, França, 1999.
[3] Dantas, A.L. Otimização Multiperíodo por Média-Variância sem posições a descoberto em Ativos de Risco. São Paulo, 2006. 64p. Dissertação de Mestrado - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
[4] Markowitz, H. Portfolio Selection. J. Finance, 7, P.77-91, 1952.
[5] Vidal, E.S.; Damasceno, B.C. Modelos Estatísticos para o Mercado de Ações. Painel apresentado no I Simpósio de Matemática e suas Aplicações de Ilha Solteira (Setembro de 2007) – FEIS - Unesp.