 ISSN 1984-820X

Simetrias e a equação Korteweg-de Vries generalizada com coeficientes variáveis

Érica M. Silva
Universidade Federal de Mato Grosso – Instituto de Física
78060-900, Cuiabá, MT
E-mail: erica@fisica.ufmt.br

Wescley L. de Souza
Universidade Federal de Mato Grosso – Instituto de Física
78060-900, Cuiabá, MT
E-mail: wescley.luiz@gmail.com

RESUMO

Há alguns anos a célebre equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + \left[u^2 + u_{xx}\right]_x = 0 \ , \tag{1}$$

foi generalizada para uma família de equações KdV totalmente não-lineares [1]:

$$u_t + \left[u^m + \left(u^n\right)_{xx}\right]_x = 0 \text{, m > 0, } 1 < n \leq 3. \tag{2}$$

Essa classe de equações é denotada por $K(m,n)$ e possui a propriedade de que, para certos valores de m e n, suas soluções (chamadas *compactons*) são dotadas de suporte compacto e de uma janela que é independente da amplitude da onda, diferentemente do sóliton KdV.

Na teoria clássica de sólitons, os conceitos de integrabilidade e de colisões elásticas estão intimamente relacionados, mas, no domínio das equações $K(m,n)$, embora algumas leis de conservação já tenham sido obtidas, não se sabe exatamente em que circunstâncias essas equações são integráveis [2].

Um grande esforço tem sido feito no intuito de compreender o mecanismo não-linear subjacente aos processos descritos pelas equações do tipo $K(m,n)$ [3, 4, 5], incluindo uma generalização análoga para a equação de Sine-Gordon [6]. O método de simetrias de Lie tem sido utilizado com esse propósito, e os trabalhos de classificação por grupo têm abrangido uma grande variedade de generalizações da equação KdV (ver [6, 7, 8] e referências).

Nosso objetivo neste trabalho é estudar uma classe de equações $K(m,n)$ através da abordagem de simetria. No procedimento padrão para se obter equações diferenciais generalizadas, um ingrediente central é a escolha de uma simetria inicial, que geralmente é considerada como a simetria de uma classe de equações mais restritiva. Partindo da equação KdV clássica, com uma álgebra de simetria conhecida, encontramos todas as equações para uma determinada classe que são invariantes sob essa álgebra de simetria. A classe que consideramos é a das equações $K(m,n)$ totalmente não-lineares, com coeficientes $f = f(x,\ t)$ e $g = g(x,\ t)$ dependentes espacial e temporalmente,

$$u_t + \left[f(x,t)u^m + g(x,t)\left(u^n\right)_{xx}\right]_x = 0 \, . \tag{3}$$

Em suma, neste trabalho partimos da álgebra de simetria da equação KdV e encontramos todas as equações em uma determinada classe que são invariantes sob essa álgebra de simetria. A execução deste programa demandou o uso intensivo de computação algébrica, e para tanto utilizamos um pacote que permitiu manipular os sistemas de equações determinantes. O referido pacote é chamado SADE (*Symmetry Analysis of Differential Equations*) [9] e foi desenvolvido por nossos colaboradores do Grupo de Física Matemática da Universidade de Brasília. Soluções invariantes para as novas equações encontradas, bem como o estudo de suas propriedades de simetria, estão em andamento e serão apresentados futuramente.

Palavras-chave*: equação KdV generalizada, simetrias de Lie, dinâmica não-linear*

Referências

[2] P. Bracken, Symmetry Properties of a Generalized Korteweg-de Vires Equation and some Explicit Solutions, Int. J. Math. Math. Sciencies 2005, vol. 13, pp. 2159-2173, (2005).

[8] F. Güngör, V. I. Lahno e R. Z. Zhdanov, Symmetry Classification of KdV-Type Nonlinear Evolution Equations, Proccedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, vol. 50, pp. 125-130, (2004).

[4] A. Pikovsky e P. Rosenau, Phase compactons, Phys. D, vol. 218, pp. 56-69, (2006).

[9] T. M. Rocha Filho e A. Figueiredo, http://ares.fis.unb.br/fismat/sade.html

[3] P. Rosenau, Nonlinear Dispersion and Compact Structures, Phys. Rev. Lett., vol. 73, pp. 1737-1741, (1994).

[5] P. Rosenau, On a model equation of traveling and stationary compactons, Phys. Lett. A, vol. 356, pp. 44-50, (2006).

[1] P. Rosenau e J. M. Hyman, Compactons: Solitons with Finite Wavelengthm, Phys. Rev. Lett., vol. 70, pp. 564-567, (1993).

[7] K. Singh e R. K. Gupta, On symmetries and invariant solutions of a coupled KdV system with variable coefficients, Int. J. Math. Math. Sciences, vol. 23, pp. 3711-3725, (2005).

[6] Y. Wang, L. Wang e W. Zhang, Application of the Adomian Decomposition Method to Fully Nonlinear Sine-Gordon Equation, Int. J. Nonl. Science, vol. 2, pp. 29-38, (2006).