 ISSN 1984-820X

# Construção de um Conjunto de Cantor em Sistemas Dinâmicos


**Máira Peres Alves**
Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: mairaalves28@yahoo.com.br

**Marcela Luciano Vilela de Souza**
Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: marcela@mat.feis.unesp.br


## RESUMO

**Introdução**: Estudaremos nesse trabalho a construção de um Conjunto de Cantor $\wedge$ usando a família quadrática $F_\mu(x) = \mu_x(1-x)$ para $\mu > 4$, família essa frequentemente usada para ilustrar diversos fenômenos importantes que ocorrem em sistemas dinâmicos. Inicialmente, apresentaremos alguns resultados, nos quais precisaremos para atingir nossa meta principal.

**Proposição** 1:
1. $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ e $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$ onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$ se $\mu > 1$

**Proposição** 2: Suponha $\mu > 1$. Se $x < 0$, então $F_\mu^n(x) \to -\infty$ quando $n \to \infty$. De modo similar, se $x > 1$ então $F_\mu^n(x) \to -\infty$ quando $n \to \infty$.

**Proposição** 3 : Seja $1 < \mu < 3$.
1. $F_\mu$ tem um ponto fixo atrator em $p_\mu = \frac{(\mu-1)}{\mu}$ e um ponto fixo repulsor em zero.
2. Se $0 < x < 1$ então $lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

**Construção do Conjunto** $\wedge$

Vamos estudar o caso em que $\mu > 4$. Pela proposição 2, todas as dinâmicas interessantes de $F_\mu$ ocorrem para $x$ pertencente ao intervalo unitário $I = [0,1]$. Note que, como $\mu > 4$, o valor máximo de $F_\mu$ será $\frac{\mu}{4} > 1$. Então existem pontos $x$ de $[0,1]$ com a propriedade $F_\mu(x) > 1$, e daí $F_\mu^n(x) \to -\infty$, isto é, $x$ sai de $I$ depois de uma iteração de $F_\mu$. Denotaremos o conjunto desses pontos por $A_0$. Claramente, $A_0$ é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$ e tem a seguinte propriedade: Se

$$x \in A_0 \Rightarrow F_\mu(x) > 1 \Rightarrow F_\mu^2(x) < 0 \text{ e } F_\mu^n(x) \to -\infty$$

Logo $A_0$ é o conjunto de pontos que escapam de $I$ imediatamente depois de uma iteração da $F_\mu$. Todos os outros pontos em $I$ permanecem em $I$ após uma iteração de $F_\mu$.
Agora, considere o conjunto $A_1 = \{x \in I / F_\mu(x) \in A_0\}$. Daí, se

$$x \in A_1 \Rightarrow F_\mu^2 > 1 \Rightarrow F_\mu^3(x) < 0 \text{ e } F_\mu^n(x) \to -\infty$$

isto é, $F_\mu(x)$ sai de $I$ depois de uma iteração de $F_\mu$.
Indutivamente, considere $A_n = \left\{x \in I / F_\mu^n(x) \in A_0\right\}$. Então, construímos os seguintes conjuntos:

$$A_0 = \{x \in I / F_\mu(x) > 1\}$$
$$A_1 = \{x \in I / F_\mu(x) \in I \text{ e } F_\mu^2(x) > 1\}$$
$$\vdots$$
$$A_n = \{x \in I / F_\mu^i(x) \in I, \forall i \leq n \text{ e } F_\mu^{n+1}(x) > 1\}$$
$$\vdots$$

Podemos então dizer que $A_n$ é o conjunto dos pontos que permanecem em $I$ até a $n$-ésima iterada de $F_\mu$, mas que saem de $I$ na $(n+1)$-ésima iterada de $F_\mu$. E esses pontos claramente divergem para $-\infty$, isto é, $x \in A_n$, implica que a órbita de $x$ tende a $-\infty$.
Agora vamos introduzir o conjunto alvo de nosso trabalho. Denote por $\wedge = I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$. Ou seja, $\wedge$ é o conjunto formado pelos pontos que permanecem em $I$ pelas iteradas de $F_\mu$.

**Análise da construção de** $\wedge$: Como $A_0$ é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$, $I - A_0$ consiste de 2 intervalos fechados disjuntos $I_0$ e $I_1$. $F_\mu$ é uma bijeção crescente de $I_0$ sobre $I$ e uma bijeção decrescente de $I_1$ sobre $I$.
$I - A_0$ consiste de 4 intervalos fechados e $F_\mu$ leva cada um deles de forma bijetiva sobre $I_1$ ou $I_0$. Logo, $F_\mu^2$ leva cada um dos 4 intervalos fechados de forma bijetiva sobre $I$. Continuando o processo, temos que $A_n$ consiste de $2^n$ intervalos abertos disjuntos e $I - (A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n)$ consiste de $2^{n+1}$ intervalos fechados, cada um dos quais é levado por $F_\mu^{n+1}$ de forma bijetiva sobre $I$. O gráfico de $F_\mu^n$ cruza com a reta $y = x$ em exatamente $2^n$ pontos e isto significa que $F_\mu$ tem exatamente $2^n$ pontos periódicos de período $n$.

**Conclusão**: A construção de $\wedge$ relembra a construção do exemplo clássico de um Conjunto de Cantor: O **Conjunto do Terço Médio de Cantor**. De fato, $\wedge$ é obtido por remoções sucessivas de intervalos abertos dos "meios"de um conjunto de intervalos fechados. E logo a seguir, recordamos o Conjunto do Terço Médio de Cantor.

**O Conjunto do Terço Médio de Cantor**: Considere inicialmente o intervalo $I = [0, 1]$ com a remoção do "terço médio"aberto, isto é, o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Obtemos então: $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Em seguida, remova dos dois intervalos fechados $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ os "terços médios"abertos respectivos de cada um, isto é, o par de intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Continue removendo os terços médios da mesma maneira. Note que $2^n$ intervalos abertos são removidos no $n$-ésimo estágio deste processo. Então, este procedimento é completamente análogo à construção de $\wedge$ feita anteriormente.

**Considerações finais**: Com a definição geral de Conjunto de Cantor, pode-se verificar que, de fato, $\wedge$ é um Conjunto de Cantor para $\mu > 4$.
**Definição**: Um Conjunto $\tau$ é um **Conjunto de Cantor** se ele é fechado, totalmente desconexo e perfeito. Um conjunto é **totalmente desconexo** se ele não contém nenhum intervalo e é **perfeito** se todo ponto nele é ponto de acumulação, isto é, ponto limite de outros pontos no conjunto.
Com esta definição pode-se provar que:

**Teorema 1** *: Se $\mu > 4$ então $\wedge$ é um Conjunto de Cantor.*
***Observação****: A demonstração do teorema acima é bem trabalhosa. Agora, considerando $\mu > 2 + \sqrt{5}$ a demonstração fica mais simples.*

# Referências


[1] *Robert L. Devaney,* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. *Addison - Wesley Publishing Company, Redwood City, CA, 1989.*