

## Fractais de Rauzy e Autômatos

Ali Messaoudi      Jéfferson Luiz Rocha Bastos

Depto de Matemática, IBILCE, UNESP,  
15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: messaoud@ibilce.unesp.br,    jeferson@ibilce.unesp.br,

Tatiana Miguel Rodrigues \*      Daniel Smania Brandão

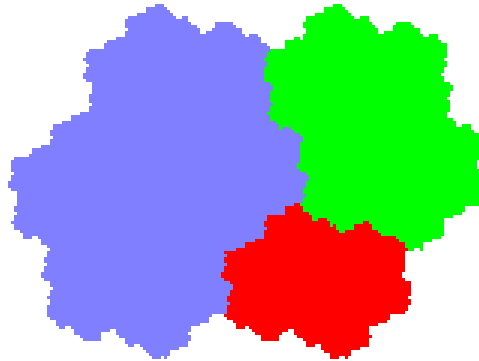
Depto de Matemática ICMC - USP - São Carlos  
13560-970 - São Carlos - SP

E-mail: tatimi@icmc.usp.br,    smania@icmc.usp.br,

### RESUMO

O fractal de Rauzy (clássico) é, por definição, o conjunto dos números complexos  $\{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \alpha^i, a_i \in \{0, 1\}, a_i a_{i+1} a_{i+2} = 0, \forall i \geq 0\}$ , onde  $\alpha$  é uma das duas raízes complexas, de módulo menor do que um, do polinômio  $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ .

O Fractal de Rauzy foi descoberto por G. Rauzy em 1982 ([5]), e desde então foi estudado por vários matemáticos (ver por exemplo [1],[2]), e foi ligado a várias áreas da matemática, como Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Números entre outras. O Fractal de Rauzy é um conjunto compacto e conexo, seu interior é simplesmente conexo, sua fronteira é um conjunto fractal. Além disso, induz um azulejamento periódico do plano complexo, isto é,  $\mathbb{C} = \bigcup_{p \in G} (\mathcal{E} + p)$  onde  $\mathcal{E} + p = \{z + p, z \in \mathcal{E}\}$ ,  $G = \mathbb{Z}\alpha^{-3} + \mathbb{Z}\alpha^{-2}$  e dados  $p, q \in G, p \neq q$  então os interiores de  $\mathcal{E} + p$  e  $\mathcal{E} + q$  são disjuntos. (ver figura abaixo).



Em [3], foi dado um algoritmo que identifica a fronteira do fractal de Rauzy. Em particular, foi construído um autômato finito que reconhece e fornece informações sobre a fronteira do fractal de Rauzy permitindo provar que sua medida de Lebesgue é nula, que ela é uma curva de Jordan e um quase-círculo (imagem de um círculo por uma função quase-conforme), e além disso, mostra que sua dimensão de Hausdorff é  $\frac{-\log \rho}{\log |\alpha|} \sim 1,09338$  onde  $\rho$  é a raiz real maximal do polinômio  $x^4 + 2x^3 - 1$ .

O objetivo deste trabalho é investigar se as propriedades do Fractal de Rauzy estudadas em [3] são verificadas em outras classes de Fractais de Rauzy. Uma classe interessante de Fractais

---

\*Aluna Doutorado ICMC - USP

de Rauzy é aquela associada aos polinômios da forma  $x^3 - ax^2 + x - 1$ ,  $a \in \mathbb{Z}, a \geq 2$ . No caso  $a = 2$ , usando técnicas relacionadas com teoria dos sistemas de numeração, teoria algébrica dos números e teoria dos fractais, construímos um autômato finito que gera a fronteira do fractal e provamos que ela é homeomorfa a um círculo. Estes resultados podem ser estendidos para o caso  $a > 2$ .

**Palavras-chave:** *Fractais de Rauzy, Sistemas de numeração, Autômato, Azulejamento do plano*

## Referências

- [1] P. Arnoux, S. Ito, Y. Sano, *Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps*, J. Anal. Math, 83, 2001, 183-206.
- [2] V. Canterini, A. Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot type*, Trans. Amer. Math. Soc, 353 (2001), 5121-5144.
- [3] A. Messaoudi, *Frontière du fractal de Rauzy et systèmes de numération complexe*, Acta Arithmética, XCV.3(2000), 195-224.
- [4] A.Messaoudi, *Propriétés arithmétiques et topologiques d'une classe d'ensembles fractales*, Acta Arithmetica, v. 121.4, p. 341-365, 2006.
- [5] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 147-178.