Desigualdade de Jensen

Luis Antônio F. de Oliveira **Flavio Lima de Souza***
UNESP - Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: lafo@mat.feis.unesp.br, flavio81169@aluno.feis.unesp.br,

RESUMO

O que desejamos mostrar com esse trabalho, é o potencial significativo de uma das mais importantes desigualdades utilizadas no estudo de otimização de funções convexas.

Johan Valdemar Jensen, era um engenheiro de telecomunicações dinamarquês, que nas horas vagas trabalhava como um matemático amador. Apesar de não ser tão conhecido, Jensen produziu algumas contribuições importantes na matemática, a mais conhecida delas é sua desigualdade publicada em 1906, na Acta Mathematica.
A desigualdade de Jensen aparece em muitas formas. Na sua forma mais simples, temos:

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2} \leq f(\frac{a_1+a_2}{2}).$$

Uma característica essencial dessa desigualdade é que ela pode ser generalizada para mais de dois pontos. Assim, dizemos que uma função f: I$\rightarrow$ R é dita convexa em R quando:

$$f((1-\alpha)x_1 +_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + (x_2),$$

para todos os pares de pontos (x_1,x_2) em I e todo $\alpha$$\in$(0,1). De modo análogo, uma função f: I$\rightarrow$ R é dita côncava em R ,se:

$$f((1-\alpha)x_1 +_2) \geq (1-\alpha)f(x_1) + (x_2),$$

para todos os pares de pontos (x_1,x_2) em I e todo $\alpha$$\in$(0,1).

Vale a seguinte:

Proposição Sejam I um intervalo da reta e $f: I \rightarrow R$ uma função. Se $x_1, ..., x_n \in$ I e $t_1, ..., t_n$ $\in$ [0,1], com $t_1 + ... + t_n$=1, então $t_1 x_1 + ... + t_n x_n \in$ I, valem as desigualdades de Jensen:
(f convexa e f côncava, respectivamente)

$$f(t_1 x_1 + ... + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + ... + t_n f(x_n), \tag{1}$$

$$f(t_1 x_1 + ... + t_n x_n) \geq t_1 f(x_1) + ... + t_n f(x_n). \tag{2}$$

Prova. Utilizando o Segundo Príncipio de Indução sobre n>1, sendo f convexa (o caso côncava é análogo). O caso n=2 é a própria definição de convexidade de f. Supondo que a desigualdade acontece para quaisquer números $x_1, ..., x_p \in$ I e $t_1 + ... + t_p$ com $t_1 + ... + t_p$=1, para p=2,...,n,

*Aluno matriculado no 2º ano de Licenciatura em Matemática verifiquemos que se tem a desigualdade para p=n+1. Assim para todos $x_1, ..., x_n \in$ I e $t_1, ..., t_n$ $\in$ [0,1], com $t_1 + ... + t_n$=1, temos:

$$t_1x_1 + ... + t_nx_n \quad \in \quad I \quad e \quad f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n).$$

Consideremos $x_1, ..., x_{n+1} \in I$ e $t_1, ..., t_{n+1} \in [0,1]$, com $t_1 + ... + t_n + t_{n+1} = 1$. Suponhamos que $t_{n+1} \neq 1$ (se $t_{n+1} = 1$, então $t_1 = ... = t_n = 0$ e nada há a ser demonstrado).
Logo $t_1 + ... + t_n = 1 - t_{n+1}$.

Definindo z=$\frac{t_1x_1+...+t_nx_n}{1-t_{n+1}}$ $=$ s$_1x_1 + ... + s_nx_n$, onde $s_j = \frac{t_j}{1-t_{n+1}}$, como vale para n=2,

$$f(t_1x_1 + ... + t_{n+1}x_{n+1}) \;\; = \;\; f((1 - t_{n+1})(\frac{t_1x_1 + ... + t_nx_n}{1 - t_{n+1}}) + t_{n+1}x_{n+1}) \;\; =$$

$$= \;\; f((1 - t_{n+1})z + t_{n+1}x_{n+1}) \leq (1 - t_{n+1})f(z) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \tag{3}$$

já que f é convexa. Como $s_1 + ... + s_n$=1, segue da hipótese de indução que $z \in I$. Daí:

$$f(z) \;\; = \;\; f(s_1x_1 + ... + s_nx_n) \leq s_1f(x_1) + ... + s_nf(x_n) \;\; =$$

$$= \;\; \frac{t_1}{1 - t_{n+1}}f(x_1) + ... + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}f(x_n) \tag{4}$$

Juntando as desigualdades (3) e (4) , obtemos:

$$f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n),$$

ou seja, vale a desigualdade também para n. Pelo Segundo Princípio de Indução segue que a desigualdade (1) é válida para todo $n \geq 2$

•

Como uma primeira aplicação, se considerarmos uma função côncava f(x)=ln x, mostra-se utilizando a desigualdade de Jensen que:

$$\sqrt[n]{x_1...x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n},$$

que é a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

O principal objetivo deste trabalho, é mostrar que a Desigualdade de Jensen pode ser extendida para o espaço das funções integráveis segundo Lebesgue.

Referências

[1] Neto, A.C.M., Desigualdades Elementares, Eureka!, nº5. OBM, 1999.

[2] Hlenka, V., Principais propriedades de funções convexas. UFPR, Curitiba, 2006.

[3] Lima, Elon L., Análise Real. Volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, 1995.