Novos resultados de reticulados via uma perturbação do homomorfismo de Minkowski

Antonio Aparecido de Andrade
Departamento de Matemática, Ibilce, Unesp
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: andrade@ibilce.unesp.br

Agnaldo José Ferrari
Departamento de Matemática Aplicada - Imecc - Unicamp
13083-970, Campinas, SP
E-mail: agnaldoferrari@ig.com.br

Resumo: *Neste trabaho, apresentamos uma pertubação do homomorfismo de Minkowski, para a geração de reticulados no $\mathbb{R}^n$ via ideais do anel dos inteiros algébricos de uma extensão finita dos racionais. Além disso, apresentamos resultados que permitem calcular a densidade de centro dos reticulados obtidos via esta pertubação. Finalmente, apresentamos exemplos de reticulados obtidos via este homomorfismo, fazendo uma comparação entre as suas densidades de centro.*

Palavras-chave: *Homomorfismo de Minkowski, Reticulado, Densidade de Centro*

1 Introdução

As aplicações de reticulados estão fortemente ligadas na teoria da informação, mais especificamente, nas transmissões e também no armazenamento de dados. O objetivo é obter reticulados no espaço euclidiano, onde a parte coberta pelas esferas (com raio máximo e que a interseção de quaisquer duas esferas seja apenas um ponto) centradas em seus pontos seja a maior possível. Mas isso, está ligado a um outro parâmetro, chamado densidade de centro. Deste modo, neste trabalho, apresentamos um novo método de gerar reticulados no $\mathbb{R}^n$ através de uma pertubação do homomorfismo de Minkowski. Também, apresentamos resultados que permite calcular a densidade de centro de tais reticulados. Ferrari [2], via o homomorfismo de Minkowski, apresentou famílias de reticulados de dimensões 2, 4, 6 e 8 com densidade de centro ótima. Assim, nosso objetivo com esta nova versão do homomorfismo de Minkowski, é obter reticulados de dimensões 2 a 8 com densidade de centro ótima, que ainda é um problema em aberto parte este homomorfismo.

Assim, na Seção 2, apresentamos o conceito do homomorfismo de Minkowski, juntamente com resultados que permite calcular a densidade de centro dos reticulados obtidos via este homomorfismo. Na Seção 3, apresentamos a perturbação σ_α, onde extendemos os resultados da Seção 2 para os reticulados obtidos via este homomorfismo. Assim, fixados $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão finita de corpos e $\mathcal{A}$ um ideal contido no anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$, vimos que a imagem de $\mathcal{A}$ por σ_α é um reticulado e obtemos a expressão para a sua densidade de centro. Para finalizar, na Seção 4, apresentamos um estudo comparando os reticulados obtidos via o homomorfismo de Minkowski e a perturbação σ_α, com o intuito de encontrar reticulados de alta densidade de centro.

2 Homomorfismo de Minkowski

Sejam $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n. Tem-se que existem n monomorfismos distintos $\sigma_j : \mathbb{L} \to \mathbb{C}$, uma vez que o polinômio minimal de um elemento primitivo de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{Q}$ tem somente n raízes em $\mathbb{C}$. Se $\sigma_j(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{R}$ diz-se que σ_j é real, caso contrário, σ_j é dito imaginário. Quando todos os monomorfismos são reais diz-se que $\mathbb{L}$ é um corpo totalmente real e quando os monomorfismos são todos imaginários diz-se que $\mathbb{L}$ é um corpo totalmente imaginário. Se $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a conjugação complexa, então para todo $j = 1, \ldots, n$, tem-se que $\alpha \circ \sigma_j = \sigma_k$, para algum $1 \leq k \leq n$, e que $\sigma_j = \sigma_k$ se, e somente se, $\sigma_j(\mathbb{L}) \subset \mathbb{R}$. Assim, usando r_1 para denotar o número de índices, tal que $\sigma_j(\mathbb{L}) \subset \mathbb{R}$, podemos ordenar os monomorfismos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de tal modo que $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ sejam os monomorfismos reais e que $\sigma_{r_1+r_2+j} = \overline{\sigma_{r_1+j}}$, para $j = 1, \ldots, r_2$. Desse modo, $n - r_1$ é um número par, e assim podemos escrever $r_1 + 2r_2 = n$.

Definição 2.1 *Seja $x \in \mathbb{L}$ um elemento. A aplicação $\sigma_{\mathbb{L}} :\ \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por*

$$\sigma_{\mathbb{L}}(x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_{r_1}(x), \Re\sigma_{r_1+1}(x), \Im\sigma_{r_1+1}(x), \ldots, \Re\sigma_{r_1+r_2}(x), \Im\sigma_{r_1+r_2}(x)),$$

é um homomorfismo injetivo de anéis, chamado de homomorfismo canônico (ou Minkowski), onde as notações $\Re(\beta)$ e $\Im(\beta)$ representam as partes real e imaginária do número complexo β, respectivamente.

Uma das aplicações deste homomorfismo é a geração de reticulados no $\mathbb{R}^n$, onde os principais parâmetros podem ser obtidos via teoria algébrica dos números, através de propriedades herdadas de $\mathbb{L}$. Isto pode ser visto de maneira formal nos resultados que seguem.

Definição 2.2 *Sejam $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ os monomorfismos de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{C}$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ uma base de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{Q}$. Definimos o discriminante de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{Q}$ por*

$$\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = \mathcal{D}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = det(\sigma_i(\alpha_j))^2.$$

Definição 2.3 *Seja $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n.*

1. *Dizemos que um elemento $\alpha \in \mathbb{L}$ é um inteiro algébrico, se existe um polinômio mônico não nulo $f(x)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

2. *O conjunto $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \{\alpha \in \mathbb{L} :\ \alpha$ é um inteiro algébrico$\}$ é um anel chamado anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$.*

Definição 2.4 *Sejam $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$ e $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$. Definimos a norma do ideal $\mathcal{A}$ como sendo o número de elementos do anel quociente $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}) = \circ(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathcal{A})$.*

Proposição 2.1 [3] *Seja $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n. Se $M \subseteq \mathbb{L}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre de posto n e se $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de M, então $\sigma_{\mathbb{L}}(M)$ é um reticulado no $\mathbb{R}^n$, com volume*

$$\mathcal{V}ol(\sigma_{\mathbb{L}}(M)) = 2^{-r_2} |\det_{1 \leq j,\, k \leq n} (\sigma_j(x_k))|,$$

onde r_2 é a metade dos monomorfismos imaginários.

Proposição 2.2 [3] *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ o discriminante de $\mathbb{L}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$, $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ e r_2 a metade do número de monomorfismos imaginários, então $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})$ e $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ são reticulados, com respectivos volumes,*

$$\mathcal{V}ol(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})) = 2^{-r_2} |\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \mathcal{V}ol(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \mathcal{V}ol(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}))\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}).$$

Proposição 2.3 [3] *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ o discriminante de $\mathbb{L}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$, $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ e r_2 metade do número de monomorfismos imaginários, então a densidade de centro do reticulado $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ é dada por*

$$\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{2^{r_2}(\rho(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})))^n}{|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})},$$

onde $\rho(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}))$ é o raio de empacotamento do reticulado $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$.

Definição 2.5 *Sejam $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n, com $n = [\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$, e $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ os monomorfismos de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{C}$. Dado um elemento $\alpha \in \mathbb{L}$, define-se o traço e a norma de α relativamente a extensão $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$, como sendo*

$$Tr_{\mathbb{L}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha) \quad e \quad \mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha).$$

Proposição 2.4 [1] *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n e $x \in \mathbb{L}$, então $|\sigma_{\mathbb{L}}(x)|^2 = c_{\mathbb{L}} Tr_{\mathbb{L}}(x\overline{x})$, onde*

$$c_{\mathbb{L}} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbb{L} \text{ for totalmente real.} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{se } \mathbb{L} \text{ for totalmente imaginário,} \end{cases}$$

onde $\overline{x}$ é a conjugação complexa de x.

Observação 2.1 *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, totalmente real ou totalmente imaginária, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$ e $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, então podemos reescrever o raio de empacotamento do reticulado $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ da seguinte forma:*

$$\rho(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2} min\{|\sigma_{\mathbb{L}}(x)|,\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0\} = \frac{1}{2} min\left\{\sqrt{c_{\mathbb{L}} Tr_{\mathbb{L}}(x\overline{x})},\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0\right\},$$

onde $c_{\mathbb{L}}$ é dado pela Proposição 2.4.

Proposição 2.5 [2] *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, totalmente real ou totalmente imaginária, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$ e $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, então a densidade de centro do reticulado $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ é dada por $\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \dfrac{1}{2^n |\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{\frac{1}{2}}} \dfrac{t^{\frac{n}{2}}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})}$, onde $t = min\{Tr_{\mathbb{L}}(x\overline{x}),\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0\}$.*

Exemplo 2.1 *Se $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\zeta_6)$, onde ζ_6 é uma raiz sexta da unidade, e $\mathcal{A} = \zeta_6 \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ é um ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[\zeta_6]$, então $n = [\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 2$, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = \pm 3$ e $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}) = 1$. Se $x \in \mathcal{A}$, então $x = \zeta_6(a_0 + a_1\zeta_6)$, com $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, e assim $Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(x\overline{x}) = 2(a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2)$. Portanto, $t = min\{Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(x\overline{x}) : x \in \mathcal{A}, x \neq 0\} = 2$, pois é suficiente tomar $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, e deste modo a densidade de centro é dada por:*

$$\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n |\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{1/2}} \frac{t^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})} = 0,28868,$$

que é uma densidade de centro ótima para esta dimensão.

3 A perturbação σ_α

Sejam $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n e $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ os homomorfismos de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{C}$, ordenados de modo que σ_i é real para $i = 1, 2, \cdots, r_1$ e $\sigma_{r_1+r_2+j} = \overline{\sigma_{r_1+j}}$ para $j = 1, 2, \cdots, r_2$, onde r_2 representa a metade dos homomorfismos imaginários.

Definição 3.1 *Seja $x \in \mathbb{L}$ um elemento. A perturbação $\sigma_\alpha : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do homomorfismo de Minkowski é definida como*

$$\sigma_\alpha(x) = (\sqrt{\alpha_1}\sigma_1(x), \ldots, \sqrt{\alpha_{r_1}}\sigma_{r_1}(x), \ldots, \Re(\sqrt{\alpha_{r_1+r_2}}\sigma_{r_1+r_2}(x)), \Im(\sqrt{\alpha_{r_1+r_2}}\sigma_{r_1+r_2}(x))),$$

onde $\alpha_i = \sigma_i(\alpha) > 0$, $\sigma_i(\alpha) \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2$ e as notações $\Re(\beta)$ e $\Im(\beta)$ representam as partes real e imaginária do número complexo β, respectivamente.

Proposição 3.1 *Seja $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n. Se $M \subseteq \mathbb{L}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre de posto n e se $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de M, então $\sigma_\alpha(M)$ é um reticulado no $\mathbb{R}^n$, com volume*

$$\mathcal{V}ol(\sigma_\alpha(M)) = b_\alpha \mid \det_{1 \leq j,\, k \leq n}(\sigma_j(x_k))|,$$

onde

- $b_\alpha = (\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha))^{\frac{1}{2}}$ *se* $\mathbb{L}$ *for totalmente real,*
- $b_\alpha = 2^{\frac{-n}{2}}(\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha))^{\frac{1}{2}}$ *se* $\mathbb{L}$ *for totalmente imaginário, e*
- $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha)$ *é a norma do elemento* $\alpha \in \mathbb{L}$.

Corolário 3.1 *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ o discriminante de $\mathbb{L}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$, $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ e $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ a norma do ideal $\mathcal{A}$, então $\sigma_\alpha(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})$ e $\sigma_\alpha(\mathcal{A})$ são reticulados, com respectivos volumes,*

$$\mathcal{V}ol(\sigma_\alpha(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})) = b_\alpha|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \mathcal{V}ol(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = b_\alpha|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}).$$

Corolário 3.2 *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ o discriminante de $\mathbb{L}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$, $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ e $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ a norma do ideal $\mathcal{A}$, então a densidade de centro do reticulado $\sigma_\alpha(\mathcal{A})$ é dada por*

$$\delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = \frac{(\rho(\sigma_\alpha(\mathcal{A})))^n}{b_\alpha\ |\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})},$$

onde $\rho(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}))$ é o raio de empacotamento do reticulado $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$.

Proposição 3.2 *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n e $x \in \mathbb{L}$ então $|\sigma_\alpha(x)|^2 = c_\alpha Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x \overline{x})$, onde*

$$c_\alpha = \begin{cases} 1, & se\ \mathbb{L}\ for\ totalmente\ real \\ \dfrac{1}{2}, & se\ \mathbb{L}\ for\ totalmente\ imagin\acute{a}rio, \end{cases}$$

e $\overline{x}$ é a conjugação complexa de x.

Observação 3.1 *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, totalmente real ou totalmente imaginária, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$ e $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, então podemos reescrever o raio de empacotamento do reticulado $\sigma_\alpha(\mathcal{A})$ da seguinte forma:*

$$\rho(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = \frac{1}{2}min\{|\sigma_\alpha(x)|,\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0\} = \frac{1}{2}min\left\{\sqrt{c_\alpha Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x \overline{x})},\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0\right\},$$

onde

$$c_\alpha = \begin{cases} 1, & se\ \mathbb{L}\ for\ totalmente\ real \\ \dfrac{1}{2}, & se\ \mathbb{L}\ for\ totalmente\ imagin\acute{a}rio, \end{cases}$$

Proposição 3.3 *Se $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ é uma extensão de grau n, totalmente real ou totalmente imaginária, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$ e $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, então a densidade de centro do reticulado $\sigma_\alpha(\mathcal{A})$ é dada por*

$$\delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n(|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha))^{1/2}}\frac{{t_\alpha}^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})},$$

onde $t_\alpha = min\{Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x\overline{x}),\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0\}$.

Exemplo 3.1 *Se $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\zeta_6)$, onde ζ_6 é uma raiz sexta da unidade, $\alpha = 2$ e $\mathcal{A} = (1-\zeta_6)\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ é um ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[\zeta_6]$, então $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 2$, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = \pm 3$, $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha) = 4$ e $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}) = 1$. Se $x \in \mathcal{A}$, então $x = (a_0 + a_1\zeta_6)(1-\zeta_6)$, com $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, e assim $Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x\overline{x}) = 4(a_0^2 + a_1^2 + a_0a_1)$. Portanto, $t_\alpha = min\{Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x\overline{x}) : x \in \mathcal{A}, x \neq 0\} = 4$, pois é suficiente tomar $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, e deste modo a densidade de centro é dada por*

$$\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n(N_{\mathbb{L}}(\alpha)|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|)^{1/2}}\,\frac{t_\alpha^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})} = 0,28868,$$

que é uma densidade de centro ótima para esta dimensão, ou seja, com a mesma densidade de centro do reticulado Λ_2.

Exemplo 3.2 *Se $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\zeta_8)$, onde ζ_8 é uma raiz oitava da unidade, $\mathcal{A} = (\zeta_8 + \zeta_8^2)\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ um ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[\zeta_8]$ e $\alpha = 3 - 2(\zeta_8 + \zeta_8^{-1}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, então $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 4$, $D_{\mathbb{L}} = \pm 256$, $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = 2$ e $\mathcal{N}(\alpha) = 1$. Se $x \in \mathcal{A}$, então $x = (\zeta_8 + \zeta_8^2)(b_0 + b_1\zeta_8 + b_2\zeta_8^2 + b_3\zeta_8^3)$, com $b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$, e assim $Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha x\overline{x}) = 8(b_0^2 - b_0b_1 + b_1^2 - b_1b_2 + b_2^2 + b_0b_3 - b_2b_3 + b_3^2)$. Portanto $t_\alpha = min\{Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha x\overline{x}) : x \in \mathcal{A}, x \neq 0\} = 8$ e deste modo a densidade de centro é dada por*

$$\delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n[|D_{\mathbb{L}}|\mathcal{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha)]^{1/2}}\frac{{t_\alpha}^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A})} = 0,125,$$

que é uma densidade de centro ótima para esta dimensão, ou seja, com a mesma densidade de centro do reticulado Λ_4.

4 Relação entre $\sigma_{\mathbb{L}}$ e σ_α

Sejam $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ uma extensão de grau n, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros de $\mathbb{L}$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ os homomorfismos distintos de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ e um elemento $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ tal que $\sigma_i(\alpha) \in \mathbb{R}$ e $\sigma_i(\alpha) > 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Comparando os reticulados $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ e $\sigma_\alpha(\mathcal{A})$, temos os seguintes fatos.

1. Os reticulados $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ e $\sigma_\alpha(\mathcal{A})$ são iguais se $\alpha_i = 1$, para $i = 1, 2, \cdots, r_1 + r_2$.

2. A densidade de centro do reticulado $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ pode ser inferior a densidade de centro do reticulado $\sigma_\alpha(\mathcal{A})$, conforme Exemplo 4.1. Deste modo, via este homomorfismo temos um novo método para obter reticulados com densidade de centro ótima.

Exemplo 4.1 *Se* $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{A} = (3-2\sqrt{2})\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ *é um ideal de* $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, *e* $\alpha = 10 + 7\sqrt{2} \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, *então* $n = [\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 2$, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = 8$, $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}) = 1$ *e* $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha) = 2$. *Se* $x \in \mathcal{A}$, *então* $x = (3-2\sqrt{2})(a_0 + a_1\sqrt{2})$, *com* $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$. *Assim,* $Tr_{\mathbb{L}}(x\overline{x}) = 34a_0^2 + 68a_1^2 - 96a_0a_1$ *e* $Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x\overline{x}) = 4a_0^2 + 8a_1^2 - 8a_0a_1$. *Portanto,* $t = 2$ *e* $t_\alpha = 4$, *e as densidades de centro são dadas por:*

1. *sem perturbação:* $\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{1/2}} \frac{t^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})} = 0,17677$

2. *com perturbação:* $\delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n(|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|\mathcal{N}(\alpha))^{1/2}} \frac{t_\alpha{}^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})} = 0,25.$

Neste caso, tem-se que $\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) < \delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A}))$.

Exemplo 4.2 *Se* $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{A} = (6+4\sqrt{2})\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ *é um ideal de* $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, *e* $\alpha = 2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, *então* $n = [\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 2$, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = 8$, $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}) = 4$ *e* $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha) = 4$. *Se* $x \in \mathcal{A}$, *então* $x = (6+4\sqrt{2})(a_0 + a_1\sqrt{2})$, *com* $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$. *Assim,* $Tr_{\mathbb{L}}(x\overline{x}) = 136a_0^2 + 272a_1^2 + 384a_0a_1$ *e* $Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x\overline{x}) = 272a_0^2 + 544a_1^2 + 768a_0a_1$. *Portanto* $t = 8$ *e* $t_\alpha = 16$, *e as densidades de centro são dadas por:*

1. *sem perturbação:* $\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{1/2}} \frac{t^{n/2}}{\mathcal{N}(\mathcal{A})} = 0,17677.$

2. *com perturbação:* $\delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n(|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha))^{1/2}} \frac{t_\alpha{}^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})} = 0,17677.$

Neste caso, tem-se que $\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A}))$.

Exemplo 4.3 *Se* $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathcal{A} = (3-\sqrt{3})\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ *é um ideal de* $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, *e* $\alpha = 2 + \sqrt{3} \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, *então* $n = [\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 2$, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = 12$, $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}) = 6$ *e* $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha) = 1$. *Se* $x \in \mathcal{A}$, *então* $x = (3-\sqrt{3})(a_0 + a_1\sqrt{3})$, *com* $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$. *Assim,* $Tr_{\mathbb{L}}(x\overline{x}) = 24a_0^2 + 72a_1^2 - 72a_0a_1$ *e* $Tr_{\mathbb{L}}(\alpha x\overline{x}) = 12a_0^2 + 36a_1^2$. *Portanto* $t = 24$ *e* $t_\alpha = 12$, *e as densidades de centro são dadas por:*

1. *sem perturbação:* $\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|^{1/2}} \frac{t^{n/2}}{\mathcal{N}(\mathcal{A})} = 0,28868.$

2. *com perturbação:* $\delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n(|\mathcal{D}_{\mathbb{L}}|\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\alpha))^{1/2}} \frac{t_\alpha{}^{n/2}}{\mathcal{N}_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})} = 0,14434.$

Neste caso, tem-se que $\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) > \delta(\sigma_\alpha(\mathcal{A}))$.

Referências

[1] J.H. Conway; N.J.A. Sloane, "Sphere packing, lattices and groups", Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] A.J. Ferrari, "Reticulados algébricos via corpos abelianos", Dissertação de Mestrado, Ibilce - Unesp - São José do Rio Preto - SP, 2008.

[3] P. Samuel, "Algebraic theory of numbers", Hermann, Paris, 1970.