 ISSN 1984-820X

Séries Condicionalmente Convergentes: Uma Experimentação em Maxima

Jorge M. V. Capela **Marisa Veiga Capela**
Depto de Físico-Química, IQ, UNESP,
14800-900, Araraquara, SP
E-mail: capela@iq.unesp.br, marisavc@iq.unesp.br

RESUMO

O estudo da convergência de uma série numérica infinita requer a análise da convergência da sequência de somas parciais da série. Contudo, para a maioria das séries o termo geral da sequência de somas parciais não é obtido facilmente e o uso de teoremas ou testes de convergência torna-se necessário. A nossa experiência no ensino de séries para estudantes do terceiro semestre de Química no IQ/Unesp de Araraquara mostrou que a metodologia tradicional de ensino, baseada em aulas expositivas seguindo as etapas *motivação*, *definição*, *exemplos*, *teoremas*, *demonstrações* e *exercícios*, não vinha produzindo resultados muito animadores para a aprendizagem, ao menos para a maioria dos alunos. Percebemos, por exemplo, que ao usar um teste de convergência o aluno se distanciava do conceito de convergência, preocupando-se apenas com o resultado do teste. Além disso, notamos também que a maioria dos alunos não era capaz de usar a teoria ministrada em aula para resolver problemas que exigissem a formulação de um racícinio um pouco mais elaborado.

Ao buscar alternativas que pudessem melhorar esse quadro, optamos por preparar aulas para o laboratório de informática incentivando o aluno a experimentar conceitos após a apresentação da teoria - afinal fazer experimentos é algo que o aluno de Química está habituado.

O uso do computador foi uma alternativa que nos pareceu viável para realizar experimentos em Matemática. Ao utilizar o computador o aluno pode manipular rapidamente uma grande quantidade de informação, o que lhe proporciona liberdade para modificar variáveis, testar resultados e observar representações gráficas.

O principal objetivo deste trabalho é a abordagem do arranjo de séries condicionalmente convergentes, por meio da experimentação no ambiente de álgebra por computador denominado Maxima. A proposta de experimentação é baseada no fato (ou na conjectura) de que a aquisição de um conhecimento matemático depende de modelos mentais elaborados pelo estudante. Tais modelos buscam a significação do conceito e de alguma maneira são formados com base em situações empíricas.

Para facilitar, gravamos no bloco de notas um arquivo denominado *somasparciais.mac* contendo as seguintes instruções:

```
S[k]:=sum(a[j],j,1,k)$
yy:makelist(S[k],k,1,n),numer$
display(''S[k]=yy);
display('s[n]-'s[n-1]=yy[n]-yy[n-1]),numer;
display(a[n]),numer;
xx:makelist(k,k,1,n)$
wxplot2d([discrete, xx, yy], [style, [points,3,5]], [xlabel,"k"],[ylabel, "a[k]"], [x,0,n+5],
[y,floor(lmin(yy)),ceiling(lmax(yy))])$
```

Essas instruções fornecem os termos e a representação gráfica da sequência de somas parciais $\{S_k\}$, $k = 0, 1, \cdots, n$. O procedimento consiste em fornecer os dados de entrada que são o termo geral da série $a[k]$ e o valor de n. Em seguida devemos carregar o arquivo *somasparciais.mac* usando a ferramenta *carregar pacote* na aba *Arquivo* da barra de ferramentas.

Consideramos neste trabalho arranjos da série harmônica alternada definida por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots. \tag{1}$$

A série harmônica alternada é condicionalmente convergente e a sua soma é $\ln 2$. Executando o arquivo *somasparciais.mac* visualiza-se que a sequência de somas parciais parece convergir para 0.6931, que é o valor aproximado de $\ln 2$. A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4\,k-3} + \frac{(-1)^{2\,k+1}}{2\,k} + \frac{1}{4\,k-1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \right) + \cdots \tag{2}$$

é um arranjo da série (1). Executando o arquivo *somasparciais.mac* visualiza-se que a sequência de somas parciais parece convergir para 1. Um outro arranjo, por exemplo, é a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{(-1)^{4\,k-1}}{4\,k-1} + \frac{(-1)^{4\,k+1}}{4\,k} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \cdots \tag{3}$$

Esta série converge para $\ln 2/2$. Executando o arquivo *somasparciais.mac* visualiza-se que a sequência de somas parciais parece convergir para 0.34645 que é um valor aproximado de $\ln 2/2$.

A utilização das rotinas computacionais propostas para o cálculo das somas parciais permitiram aos alunos experimentar rapidamente que o resultado da soma de séries condicionalmente convergentes depende de como a soma é realizada. Dessa forma, eles foram estimulados a formular a sua própria concepção do conceito de convergência de séries.

A participação do professor no processo de experimentação é de fundamental importância, pois cabe a ele orientar a observação dos fenômenos ou resultados, garantindo assim o objetivo primordial da aprendizagem, que é a aquisição do conhecimento científico e não somente a sua observação. Além da experimentação, o professor também deve estar atento à abstração do conhecimento adquirido, pois é ela que permite ao aluno alterar e corrigir os modelos concebidos conforme outros problemas lhe são apresentados, consolidando assim o processo de aprendizagem.

Palavras-chave: *Séries condicionalmente convergentes, Experimentação matemática, Maxima*

Referências

[1] M. P. Matos, "Séries e Equações Diferenciais", Prentice-Hall, São Paulo, 2001.

[2] G. B. Thomas, "Cálculo", v.2, Addison Wesley, São Paulo, 2003.

[3] R.G. Bartle, "Elementos de Análise Real", 2a. ed., Campus, Rio de Janeiro, 1983.

[4] D. Possa, J. A. Nogueira, Alguns Problemas de Eletromagnetismo Envolvendo Séries Infinitas, *Rev. Bras. Ens. Fis.*, 25 (2003) 384-387.

[5] Maxima, a Computer Algebra System, http://maxima.sourceforge.net.