

Aplicação do Método das Diferenças Finitas no cálculo das tensões em tubos axissimétricos de parede grossa

Anderson R. Vobornik Wolenski, Anelize B. Monteiro, André L. Christoforo

Universidade do Estado de Mato Grosso, Departamento de Engenharia Civil

78550-000, Sinop, MT

E-mail: andersonunemat@gmail.com, ane.lize.eng@gmail.com, alchristoforo@gmail.com

RESUMO

Muitas leis da física, biologia, economia e matemática buscam a solução para inúmeros problemas que, por fim, recaem em equações diferenciais. Em particular, na Mecânica dos Sólidos, descrever o comportamento de uma estrutura significa determinar, em qualquer um de seus pontos, o campo dos deslocamentos, tensões e deformações para uma dada condição de carregamento externo e de vinculação no contorno, assim como discutido no trabalho [1].

Na Engenharia das Estruturas, o estudo do comportamento mecânico de tubos de seção circular submetidos a um estado de pressões (interna e/ou externa) caracteriza-se de suma importância, pois conduz a resultados experimentais e, principalmente, práticos, como é o caso dos tubos destinados ao transporte de fluidos.

Em relação a estes tubos, sujeitos a ação de pressões uniformes, as tensões radial σ_r e circunferencial σ_θ que se desenvolvem ao longo da espessura da parede são funções apenas do raio, constituindo assim um problema axissimétrico. A determinação destas tensões são abordadas de forma alternativa por [2], através das *Funções de Tensão de Airy*. Neste trabalho, objetiva-se apresentar e aplicar o Método das Diferenças Finitas (MDF) na determinação das tensões em tubos axissimétricos de parede grossa, com solução analítica conhecida, de modo a constatar e comparar a eficiência do método.

Seja um tubo de parede grossa, provido de êmbolos laterais de modo a se evitar o surgimento de tensões longitudinais, solicitado pelas pressões interna p_i e externa p_e uniformemente distribuídas, com raio interno igual a a e raio externo igual a b , como ilustra a Figura 1.a.

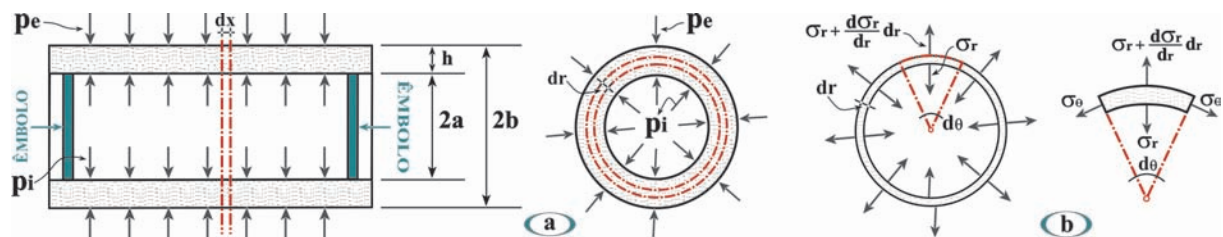


Figura 1: a) Tubo submetido às pressões uniformes. b) Equilíbrio de forças.

Admitindo como unitária a espessura da fatia do tubo, surge a partir do equilíbrio de forças, apresentado na Figura 1.b, a equação diferencial (1). A mesma apresenta uma *indeterminação estática*, ou seja, duas funções incógnitas e somente uma equação, logo

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \quad (1)$$

Esta equação pode ser reescrita em termos da função incógnita σ_r e, para isto, torna-se necessário o emprego das *Funções de Deformação Radial e Circunferencial* do tubo juntamente com as *Equações de Compatibilidade* e da *Lei de Hooke* em coordenadas cilíndricas. Deste

modo, tem-se uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) homogênea com coeficiente variável, conhecida como Equação de Cauchy, descrita por

$$r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \text{ com } \begin{cases} \sigma_r(r = a) = -p_i \\ \sigma_r(r = b) = -p_e \end{cases} \text{ e } a \leq r \leq b. \quad (2)$$

Para determinação de sua solução aproximada, desenvolveu-se no programa *Mathcad 2000*© um algoritmo fundamentado no MDF. Em particular, assim como requerido na EDO do problema, optou-se por utilizar um polinômio interpolativo de grau dois de maneira a se obter aproximações para as derivadas primeira e segunda, resultando nos operadores de diferenças finitas, conforme a equação

$$\sigma'_i \cong \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_{i-1}}{2h} \text{ e } \sigma''_i \cong \frac{\sigma_{i+1} - 2\sigma_i + \sigma_{i-1}}{h^2}. \quad (3)$$

É importante observar que o operador de primeira derivada envolve o conhecimento da função em dois pontos, enquanto que o de segunda derivada, envolve o conhecimento da função em três. Ambos os operadores exprimem o mesmo grau de precisão em virtude da aproximação do polinômio interpolador cujo resto, é da ordem do espaçamento h e h^2 .

Para avaliar a eficiência do MDF aplicado ao problema de tubos, foram atribuídos os seguintes valores às constantes: $a = 20 \text{ cm}$; $b = 40 \text{ cm}$; $p_i = 2 \text{ kN/cm}^2$ e $p_e = 4 \text{ kN/cm}^2$, objetivando um erro percentual relativo inferior a 1%. Assim, substituindo as equações (3) em (2), juntamente com condições de contorno, tem-se a equação de recorrência

$$\left(\frac{6 + 2r + 3h}{2}\right)\sigma_{i+1} - (2r + 6)\sigma_i + \left(\frac{6 + 2r - 3h}{2}\right)\sigma_{i-1} = 0. \quad (4)$$

Com a análise dos gráficos da Figura 2, mais precisamente no intervalo médio da espessura do tubo com $h = 10 \text{ cm}$, obteve-se um erro percentual relativo para *Malha 1* de 10,08%, enquanto que para *Malha 5*, um erro de 0,85%, evidenciando a diminuição do erro percentual a partir do refinamento da malha analisada.

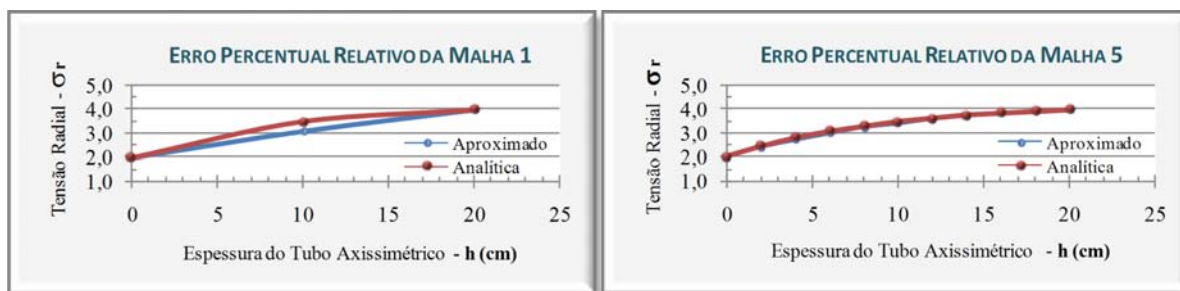


Figura 2: Gráficos das soluções analítica e aproximada com duas discretização de malhas distintas.

Constata-se, a partir das considerações impostas na modelagem do problema e aplicação do MDF, que a metodologia alternativa utilizada, conduz a resultados satisfatórios para o cálculo das Tensões Radiais σ_r de tubos axissimétricos de parede grossa, mostrando-se eficiente, de fácil entendimento e implementação.

Palavras-chave: *Método das Diferenças Finitas, Tensões Radiais, Equações Diferenciais*

Referências

- [1] A. L. Christoforo, “Aplicação do método de Resíduos Ponderados na resolução de um problema da Mecânica dos Sólidos”, I ERMAC, UNESP - Bauru/SP. 2008.
- [2] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, “Teoria da Elasticidade”, Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1980.