

MODELO SIR DISCRETO PARA A DISPERSÃO DE UMA EPIDEMIA

Leonel Giacomini Delatorre, Otonio Dutra da Silva

Departamento de Matemática, CCNE – UFSM
97105-900, Santa Maria - RS
E-mail: leoneldelatorre@mail.ufsm.br, tonimatematico@mail.ufsm.br;

Luiz Alberto D. Rodrigues, Diomar C. Mistro

Departamento de Matemática, CCNE – UFSM
97105-900, Santa Maria - RS
E-mail: luizdiaz@smail.ufsm.br, dcministro@smail.ufsm.br;

RESUMO

Comportamentos periódicos e caóticos são observados com frequência em fenômenos de propagação de certas doenças. Por exemplo, alguns dados temporais observados para caxumba e catapora parecem refletir periodicidade, enquanto dados de sarampo e leptospirose indicam a existência de caos. Equações a diferenças apresentam-se, então, como uma ferramenta adequada para retratar tais comportamentos. O modelo proposto é descrito por um sistema de equações a diferenças acopladas pela dispersão dos indivíduos.

Em modelos epidemiológicos, a população é dividida em compartimentos que refletem o estado em que os indivíduos se encontram no desenvolvimento da doença, como por exemplo, suscetíveis (S), infectados (I) e recuperados (R). A partir disso, para a formulação do modelo SIR discreto, consideram-se as seguintes hipóteses: a população total é constante; todos os indivíduos nascem suscetíveis; não há mortalidade devido à doença; o contágio se dá pelo contato dos indivíduos suscetíveis e infectados a uma taxa proporcional à fração de infectados na população, e ocorre recuperação dos indivíduos infectados.

Neste trabalho, apresentamos um modelo SIR discreto espacialmente estruturado para uma epidemia.

O espaço é considerado como um domínio bidimensional dividido em células discretas denominadas de sítios. Os sítios são regiões físicas onde os indivíduos se reproduzem; a movimentação considerada é entre os sítios.

O estado do sistema é descrito por uma matriz, atribuindo valores para as densidades populacionais em cada vértice de um reticulado plano.

No modelo, a cada geração, os indivíduos passam por dois processos distintos: movimentação e dinâmica vital. No processo de movimentação, uma fração μ_I da população de indivíduos infectados, uma fração μ_S da população de indivíduos suscetíveis e uma fração μ_R da população de recuperados, abandonam seu sítio para colonizar igualmente os quatro vizinhos mais próximos (vizinhança de Moore). As equações que caracterizam a fase de dispersão são descritas por:

$$S'_{i,j} = (1 - \mu_S) S^t_{i,j} + \frac{\mu_S}{4} \sum_{v,w \in V_{i,j}} S^t_{v,w},$$

$$I'_{i,j} = (1 - \mu_I) I^t_{i,j} + \frac{\mu_I}{4} \sum_{v,w \in V_{i,j}} I^t_{v,w},$$

$$R'_{i,j} = (1 - \mu_R) R^t_{i,j} + \frac{\mu_R}{4} \sum_{v,w \in V_{i,j}} R^t_{v,w},$$

onde $V_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$ é o conjunto dos quatro sítios mais próximos do sítio (i, j) , $S^t_{i,j}$, $I^t_{i,j}$ e $R^t_{i,j}$ são, respectivamente, as densidades populacionais dos indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados na geração t , antes da movimentação. $S'_{i,j}$, $I'_{i,j}$ e $R'_{i,j}$ representam as densidades populacionais após a movimentação.

As equações que descrevem o processo de interação ou transmissão da doença entre indivíduos suscetíveis e infectados dentro de cada sítio são dadas pelo seguinte sistema de equações a diferenças:

$$\begin{aligned} S^{t+1}_{i,j} &= S'_{i,j} - \alpha \frac{I'_{i,j}}{N} S'_{i,j} + \beta (I'_{i,j} + R'_{i,j}), \\ I^{t+1}_{i,j} &= (1 - \beta - \gamma) I'_{i,j} + \alpha \frac{I'_{i,j}}{N} S'_{i,j}, \\ R^{t+1}_{i,j} &= (1 - \beta) R'_{i,j} + \gamma I'_{i,j}, \end{aligned}$$

onde $\alpha > 0$ é a taxa de contato, isto é, o número médio de contatos efetivos de um indivíduo infectado em uma unidade de tempo e $\beta > 0$ é a taxa de mortalidade natural, considerada igual à taxa de natalidade para manter a população total N constante.

Verificamos que, a propagação de uma epidemia, a partir de um foco de infecção, ocorre na forma de uma onda de invasão. Simulações numéricas indicam que a velocidade de propagação da doença cresce com o aumento da taxa de contatos e do coeficiente de movimentação. A distribuição espacial assintótica de suscetíveis e infectados pode ser homogênea, heterogênea e periódica no tempo, assim como caótica no espaço e no tempo.

Palavras-chave: *Epidemiologia, Modelos Discretos, Redes de Mapas Acoplados.*

Referências Bibliográficas:

- [1] L. J. S. Allen, Some Discrete-Time SI, SIR, and SIS Epidemic Models, *Mathematical Biosciences*, vol. 124, pp. 83-105, (1994).
- [2] L. A. D. Rodrigues, D. C. Mistro, S. M. H. Centenaro, Um Modelo Matemático Discreto para a Dispersão da Leptospirose em uma População de Ratos, *TEMA*, vol. 9, pp. 155-164, (2008).