 ISSN 1984-820X

Introdução à Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau

Fernando Lourenço **Marcelo Reicher Soares**
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP,
Ilha Solteira, SP
E-mail: patrioooota@yahoo.com.br, reicher@mat.feis.unesp.br,

INTRODUÇÃO

A Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau foi introduzida por J. F. Colombeau no início dos anos 80 com a finalidade de "resolver"o Problema da Multiplicação de Distribuições. Desde então a Teoria vem se desenvolvendo em ritmo crescente e despertando um interesse cada vez maior por parte significativa da comunidade Matemática internacional. Muitas aplicações da Teoria foram obtidas em áreas como: Equações Diferenciais Parciais e Ordinárias, Geometria, Análise Complexa e Análise Funcional. Lembramos ainda que muitos dos problemas significativos e importantes da engenharia, das ciências físicas e das ciências sociais, quando formulados matematicamente, envolvem Equações Diferenciais. Esses problemas podem ser melhor compreendidos estudando-se e analisando-se equações diferenciais no contexto das Funções Generalizadas de Colombeau, que é um ambiente mais amplo do que o Espaço das Distribuições, uma vez que contém uma "cópia"deste último, e permite o produto de seus elementos, consequentemente, viabiliza o estudo de equações não lineares.

RESUMO

1. NÚMEROS GENERALIZADOS DE COLOMBEAU

Os Números Generalizados formam uma Álgebra que possui características muito particulares. Nela, por exemplo, temos a definição de uma ultra-métrica. Os elementos dessa Álgebra são chamados de números generalizados e a denotaremos por $\overline{\mathbb{K}}$.

1.1 Definição e Algumas Propriedades de $\overline{\mathbb{K}}$

Mais particularmente os Números Generalizados são, na verdade, uma Álgebra Quociente $\overline{\mathbb{K}} = \dfrac{\mathcal{E}_M(\mathbb{K})}{\mathcal{N}(\mathbb{K})}$, e seus elementos são os números generalizados.
Um conceito importante é a definição de Associação entre números generalizados, que é um ponto essencial da Teoria de Colombeau, muito útil quando mostramos que o conjunto das Distribuições está imerso no conjunto das Funções Generalizadas de Colombeau (neste momento substituimos o conceito de igualdade por uma "igualdade fraca"a associação).

1.2 Uma Relação de Ordem Parcial Sobre $\overline{\mathbb{R}}$

Na Álgebra dos Números Reais Generalizados, temos aqueles aos quais chamamos q-positivo (donde derivam os q-negativo), que viabilizam a definição de uma relação de ordem parcial "$\leq$" sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Não é possível, no entanto, definir uma relação de ordem total.
Um resultado importante é uma proposição que garante que $\overline{\mathbb{R}}$ com a relação "$\leq$"é um reticulado.

1.3 Uma Ultra-métrica para $\overline{\mathbb{K}}^n$

É possível definir uma função de $\overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}}$ em $\mathbb{R}_+$ que é uma ultra-métrica sobre $\overline{\mathbb{K}}$, sendo assim, $\overline{\mathbb{K}}$ juntamente com essa ultra-métrica será um espaço ultra-métrico, logo é possivel obter uma topologia (denotada $\Im$) em $\overline{\mathbb{K}}$. Uma função $\|\cdot\|$ que terá a maioria, exceto uma, das propriedades que definem uma norma, pode ser obtida. Resultados importantes que advém destas estruturas são:

$(\overline{\mathbb{K}}, \Im)$ é completo
$(\overline{\mathbb{K}}, \Im)$ é um anel topológico

1.4 Algumas propriedades de $\overline{\mathbb{K}}^n$
Estudamos condições necessárias e suficientes para convergência de sequências e séries em $\overline{\mathbb{K}}$. Em seguida, exploramos a topologia do conjunto das constantes generalizadas de Colombeau e observamos fenômenos diferentes, como o fato de uma bola aberta de centro em zero e raio um coincidir com o seu fecho, resultado este muito diferente da topologia Euclidiana. Outros resultados mostram comportamentos não usuais que derivam da métrica estabelecida.
$\overline{\mathbb{K}}$ não é um corpo, pois nem todo elemento possui um inverso multiplicativo, assim definimos um novo conjunto Inv($\overline{\mathbb{K}}$) composto das constantes generalizadas invertíveis, este é um subconjunto aberto de $\overline{\mathbb{K}}$, e mais, é um subconjunto denso em $\overline{\mathbb{K}}$.
A partir da definição do conceito de raiz quadrada de um número real generalizado q-positivo, é possível também definir um produto escalar generalizado para o qual vale a Desigualdade de Cauchy-Schwarz Generalizada.

1.5 Definição e Algumas Propriedades de $\mathcal{G}(\Omega, \mathbb{K})$
Estudamos a definição da Álgebra das Funções Generalizadas de Colombeau, $\mathcal{G}(\Omega, \mathbb{K}) = \dfrac{\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbb{K}]}{\mathcal{N}[\Omega, \mathbb{K}]}$, universo amplo para a solução de EDP's não lineares e que resolve, bem como suscita, muitos outros problemas em matemática. Esta Álgebra contém propriamente as constantes generalizadas. Destacaremos suas principais propriedades e veremos que é possível definir um operador derivação nessa Álgebra, mostrando assim que, na verdade, ela é uma Álgebra Diferencial.

1.6 O Conjunto $\widetilde{\Omega}_c$ e o valor pontual generalizado
Uma diferença significativa entre as funções generalizadas de Colombeau e as funções clássicas é que uma função clássica é caracterizada pelos valores que assume nos pontos de seu domínio, já as funções generalizadas não são caracterizadas por valores pontuais, muito embora possamos definir o valor pontual generalizado de uma função generalizada de Colombeau.

Referências

[1] Aragona, J. & Biagioni, H. - A Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions. Anal. Math., 17(1991), 75-132.

[2] Colombeau, J.F. - Elementary Introduction to New Generalized Functions. North- Holland, Amsterdam, 1985.

[3] Soares, M.R. - Sobre Alguns Problemas da Teoria das Funções Holomorfas Generalizadas. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

[4] Veiga, D.G. - Análise Real e Complexa Generalizada de Colombeau - Uma Introdução. Dissertação de Mestrado, Universidade de são Paulo, São Paulo, 2007.