# Reticulados Hiperbólicos Geometricamente Uniformes Mergulhados Isometricamente em Espaço Euclidiano

**Laís Bássame Rodrigues*** **Edson Agustini**
Faculdade de Matemática, FAMAT, UFU,
38400-902, Uberlândia, MG
E-mail: laisbassame@hotmail.com, agustini@ufu.br

## RESUMO

### Introdução

Em décadas recentes houve um interesse relativamente grande de diversos pesquisadores da Teoria da Informação e Codificação na área de reticulados algébricos e associados aos chamados *códigos geometricamente uniformes*, conforme pode-se constatar na referência [2]. Particularmente, reticulados provenientes de órbitas de pontos por grupos discretos de isometrias em espaços de curvatura gaussiana constante negativa, conhecidos por *espaços hiperbólicos*, tem despertado interesse devido ao fato de que, nesses espaços, a quantidade de grupos discretos de isometrias é maior do que em espaços euclidianos. Isto se traduz pela existência de uma enorme quantidade de reticulados que originam códigos geometricamente uniformes em espaços hiperbólicos. Nosso interesse está justamente em explorar as propriedades métricas desses reticulados, visando sua aplicação em Teoria da Codificação. No entanto, como é de conhecimento da comunidade científica, os códigos corretores de erros utilizados na prática são modelados a partir do ambiente euclidiano e, portanto, são necessárias ferramentas matemáticas que transportem reticulados "hiperbólicos" para espaços euclidianos mas que mantenham parâmetros importantes desses reticulados, como distância mínima e áreas de Regiões de Voronoi (ou Dirichlet). Essas ferramentas matemáticas de que dispomos são os chamados mergulhos isométricos. Em particular, trabalharemos com mergulhos isométricos de $\mathbb{H}^2$ (plano hiperbólico) em $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ (hiperesfera de raio $1$ e dimensão $8$) que podem ser encontrados em [1] e desenvolvidos em [5].

### Desenvolvimento e Resultados

Existe um reticulado de $16$ pontos no plano euclidiano bastante utilizado em modulação de sinais e códigos corretores de erros em canais de transmissão ruidosos que é conhecido por $16 - QAM$ (quadrature amplitude modulation). Para modelá-lo consideremos:
$(i)$ o grupo discreto de isometrias $G_1 = \langle T_{\vec{e}_1}, T_{\vec{e}_2} \rangle$, gerado pelas translações $T_{\vec{e}_1}$ e $T_{\vec{e}_2}$, sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ base canônica do espaço vetorial usual $\mathbb{R}^2$.
$(ii)$ o ponto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e sua órbita $G_1 P = \left\{\varphi(P) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in G_1\right\}$.
$(iii)$ o grupo discreto de isometrias $G_2 = \langle T_{4\vec{e}_1}, T_{4\vec{e}_2} \rangle$ gerado pelas translações $T_{4\vec{e}_1}$ e $T_{4\vec{e}_2}$.
$(iv)$ a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $P_1 \sim P_2 \Longleftrightarrow P_2 = \rho(P_1)$, sendo $\rho \in G_2$. Denotaremos a classe de equivalência de um ponto $P$ por $\overline{P}$.
$(v)$ o espaço quociente $E = \mathbb{R}^2/\sim\, = \left\{\overline{P} : P \in \mathbb{R}^2\right\}$. (que também é indicado por $\mathbb{R}^2/G_2$)

Logo, sobre $E$ temos o conjunto das classes de equivalência de $16$ pontos da órbita de $P$, que é definido como sendo o reticulado $16 - QAM$.

Nosso interesse é mergulhar isometricamente o $16 - QAM$ em $\mathbb{S}^8$, analisar suas propriedades métricas e compará-las com reticulados "euclidianos" também em $\mathbb{S}^8$. Para isso, consideremos o mergulho isométrico $M : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{S}^8$ (referência [1], páginas 321 a 323), com $\varepsilon = \frac{1}{2}$, e $\mathbb{H}^2$ representado pelo modelo $\left(\mathbb{R}^2, ds\right)$, com a métrica riemanniana $ds$ tal que $ds^2 = dx^2 + \cosh^2(x)\, dy^2$.

*bolsista de Mestrado CAPES

Utilizamos o reticulado $16-\mathsf{QAM}$, no modelo $\left(\mathbb{R}^2, \mathsf{ds}\right)$ de dois modos distintos:
(1) colocando-o no primeiro quadrante de $\left(\mathbb{R}^2, \mathsf{ds}\right)$ de modo que $\mathsf{P}=(0,0)$ obtivemos, mergulhando-o no $\mathbb{S}^8$ por $\mathsf{M}$, um reticulado de 16 pontos com distância mínima euclidiana igual a $0,001218021438$.
(2) colocando-o de modo simétrico em relação aos eixos coordenados de $\left(\mathbb{R}^2, \mathsf{ds}\right)$ obtivemos, mergulhando-o no $\mathbb{S}^8$ por $\mathsf{M}$, um reticulado de 16 pontos com distância mínima euclidiana igual a $0,1293024128$.

Percebemos nitidamente uma melhora. No entanto, a posição que devemos colocar o $16-\mathsf{QAM}$ em $\left(\mathbb{R}^2, \mathsf{ds}\right)$ de tal modo que obtenhamos a melhor distância mínima é, ainda um problema em aberto que estamos estudando. Por outro lado, como a análise não envolve os reticulados genuinamente hiperbólicos que citamos acima, iremos considerar um novo reticulado de 16 pontos que não existe no ambiente euclidiano. Para modelá-lo consideremos:
$(a)$ o grupo discreto de isometrias em $\mathbb{H}^2$ (grupo fuchsiano - ver [4]) $F_1=\langle\phi_1,\phi_2,\phi_3\rangle$, gerado pelas reflexões hiperbólicas nos lados de um triângulo hiperbólico equilátero de ângulos internos $\frac{\pi}{4}$ no Disco de Poincaré, com um de seus lados no eixo das abscissas e um vértice na origem.
$(b)$ o ponto $Q=\left(a\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ centro do triângulo acima, que leva-nos ao valor $a=0,8607063036$, e sua órbita $F_1Q=\left\{\gamma(Q)\in\mathbb{H}^2:\gamma\in F_1\right\}$.
$(c)$ o grupo discreto de isometrias $F_2=\langle\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\rangle$ gerado pelas isometrias hiperbólicas $\tau_1,\dots,\tau_4$ que identificam os lados do octógono hiperbólico regular com centro na origem composto por 16 triângulos equiláteros conforme descritos no Item $(a)$.
$(d)$ a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{H}^2$ definida por $Q_1\sim Q_2 \Longleftrightarrow Q_2=\tau(Q_1)$, sendo $\tau\in F_2$. Denotaremos a classe de equivalência de um ponto $Q$ por $\overline{Q}$.
$(e)$ o espaço quociente $F=\mathbb{H}^2/\sim=\left\{\overline{Q}:Q\in\mathbb{H}^2\right\}$. (que também é indicado por $\mathbb{H}^2/F_2$)

Logo, sobre $F$ temos o conjunto das classes de equivalência de 16 pontos da órbita de $Q$, que definiremos como sendo o reticulado $16-\mathsf{HQAM}$. De forma análoga, a imagem desse reticulado por $\mathsf{M}$ com $\varepsilon=\frac{1}{2}$ possui distância mínima euclidiana $0,2235478903$, que é bastante superior às distâncias mínimas do $16-\mathsf{QAM}$ mergulhado.

**Conclusões**

Embora nosso estudo esteja no início, percebemos que a utilização de reticulados hiperbólicos como o $16-\mathsf{HQAM}$ resulta em distâncias mínimas melhores no contexto de Teoria de Codificação quando mergulhados isometricamente em ambientes euclidianos. De acordo com [3] o estudo de distância mínima em reticulados euclidianos de dimensões altas está aberto. Assim, acreditamos que a geração de reticulados provenientes de ambientes hiperbólicos em espaços euclidianos, via mergulhos isométricos, pode conduzir a códigos corretores com bons parâmetros.

**Palavras-chave**: *Reticulados, Mergulhos Isométricos, Códigos Corretores de Erros, Distância Mínima.*

# Referências

[1] D. Blanusa, "$C^\infty$-isometric imbeddings of the hyperbolic plane and of cylinders with hyperbolic metric in spherical spaces". *Annali di Matematica Pure et Applicata* (Springer-Verlag), vol 4, n.57, 1962, pp.321-337.

[2] D.J. Forney Jr., "Geometrically Uniform Codes", IEEE Transactions on Information Theory, vol.37. n.5, sept.1991, pp. 1241-1260.

[3] N.J.A. Sloane, J.H. Conway, Sphere Packings, Lattices and Groups, 3 ed., Springer, New York, 1999.

[4] S. Katok, Fuchsian Groups, University of Chicago Press, Chicago, 1992.

[5] W. E. Vieira, "Mergulhos Isométricos do Plano Hiperbólico em Espaços Euclidianos", Tese de Mestrado, Famat, Universidade Federal de Uberlândia, 2009.