Fórmulas de Curvatura para Curvas Planas

Robson A. Trevizan Santos * **Osmar Aléssio**†
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP - Departamento de Matemática
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: robson71183@aluno.feis.unesp.br, osmar@mat.feis.unesp.br

RESUMO

Curvas no Plano

O principal objetivo é estudar as fórmulas de curvatura de curvas planas em suas diversas formas de representação. As curvas podem ser representadas nas formas: paramétrica, implícita, explícita e polar. A representação explícita é um caso especial das paramétricas e implícitas. Para todos os casos queremos expressar todas as fórmulas para o cálculo da curvatura. Fórmulas de curvatura para curvas representadas parametricamente são facilmente encontradas em livros de cálculo e geometria diferencial, porém fórmulas para curvas representadas implicitamente são raras. A fórmula de curvatura para curva implícita mais comum é $k = -\frac{f_{xx}.f_y^2 - 2f_{xy}.f_x.f_y + f_x^2.f_{yy}}{((f_x)^2+(f_y)^2)^{3/2}}$, ela é resultado da aplicação do teorema da função implícita. Neste trabalho, o objetivo é somente apresentar outras fórmulas para a curvatura de curvas implícitas que não são comuns. Algumas fórmulas não usuais são mais compactas (formas matriciais), talvez isso gere um ganho computacional em dimensões maiores. No artigo [2] a curvatura da curva de interseção de $(n-1)$ superfícies em $\mathbb{R}^n$ é $k = \frac{|(T(f_1,\cdots,f_{n-1}) * H(f_1,\cdots,f_{n-1})) \times T(f_1,\cdots,f_{n-1})|}{\|T(f_1,\cdots,f_{n-1})\|^3}$, onde $T(f_1,\cdots,f_{n-1}) = \nabla f_1 \wedge \cdots \wedge \nabla f_{n-1}$, $H(f_1,\cdots,f_{n-1}) = \nabla(\nabla f_1 \wedge \cdots \wedge \nabla f_{n-1})$, $\times$ produto exterior e $\wedge$ produto vetorial. A fórmula acima é uma extensão da fórmula no plano $k = -\dfrac{T(f) * H(f) * T(f)^t}{\|\nabla f\|}$.

Curvas Paramétricas

Definição 1 *Definimos uma **curva parametrizada diferenciável plana** como uma aplicação $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞, I aberto em $\mathbb{R}$, que para cada t (parâmetro) em I associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções $x(t)$, $y(t)$ (componentes) são diferenciáveis de classe C^∞. O subconjunto $C = \left\{(x(t),y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(t) = (x(t),y(t)), t \in I\right\}$ é o **traço** da curva α.*

Definição 2 *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado de vetor tangente.*

Definição 3 *Dizemos que a curva α é **regular**, se sua primeira derivada $\alpha'(t)$ (ou vetor tangente) for não nula para qualquer $t \in I$. Daí podemos definir o vetor tangente unitário $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||} = \dfrac{(x'(t),y'(t))}{||(x'(t),y'(t))||}$ e vetor normal unitário $\overrightarrow{N}(t) = \dfrac{(-y'(t),x'(t))}{||(-y'(t),x'(t))||}$.*

Definição 4 *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Fixado $t_0 \in I$, a função $s : I \to \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du$, onde $t_0 < t$, é chamada de função comprimento de arco da curva α a partir de t_0.*

Definição 5 *Uma curva paramétrica regular $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ está **parametrizada pelo comprimento de arco** s se para $\forall s \in I$ temos $||\beta'(s)|| = 1$. Assim: $\overrightarrow{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ e $\overrightarrow{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$*

Definição 6 *(Curvatura). A curvatura de β em s é o número real $k(s)$ tal que $\overrightarrow{t}'(s) = k(s)\overrightarrow{n}(s)$.*

*Aluno de Iniciação Científica
†Professor Orientador

Fórmulas de Curvatura	
Curvas Parametrizadas $\beta(s)=(x(s),y(s))$ s é comprimento de arco	Curvas Parametrizadas $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ t é parâmetro qualquer
$k(s)=-\left\langle \overrightarrow{t}'(s), n(s)\right\rangle$	$k(t)=\frac{\Vert T'(t)\Vert}{\Vert\alpha'(t)\Vert}, T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\Vert\alpha'(t)\Vert}$
$k(s)=\Vert\beta''(s)\Vert$	$k(t)=\frac{\det\begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t)\end{bmatrix}}{\Vert\alpha'(t)\Vert^3}$
	$k(t)=\frac{\sqrt{(\Vert\alpha'(t)\Vert\Vert\alpha''(t)\Vert)^2-(\alpha'(t)\cdot\alpha''(t))^2}}{\Vert\alpha'(t)\Vert^3}$

Definição 7 ***(Curvas Polares)*** *A curva plana pode ser representada por uma equação polar $\rho=\rho(\theta)$ onde ρ é a distância da origem no instante θ.*

Definição 8 ***(Curva Explícita)*** *A curva explícita é o gráfico de uma função $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$, isto é,*
$C:\left\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 | y=f(x)\right\}$.

Fórmulas de Curvatura	
Coordenadas Polares $\rho=\rho(\theta)$	Curva Explícita $y=f(x)$
$k(\theta)=\frac{2\rho'(\theta)^2-\rho(\theta)\rho''(\theta)+\rho(\theta)^2}{\left(\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$	$k(x)=\frac{\vert f''(x)\vert}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Definição 9 ***(Curvas Implícitas)*** *A curva implícita é o conjunto de pontos $C:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=c\}$ que satisfazem a equação $f(x,y)=c$.*

Teorema 1 ***(Teorema da Função Implícita)*** *Sejam $I\subset\mathbb{R}$ um aberto, $f:I\to\mathbb{R}$ de classe $C^k, k\geq 1$, $f(x_0,y_0)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Então existem abertos $U\subset\mathbb{R}$, $V\subset\mathbb{R}$ com $x_0\in U\subset I\subset\mathbb{R}$, tais que, para todo $x\in U$, existe um único $y=y(x)\in V$ tal que $f(x,y(x))=0$ e $y=y(x)\in C^k$.*

Os vetores $\nabla f=(f_x,f_y)$, $T(f)=\frac{(-f_y,f_x)}{\Vert\nabla f\Vert}$, $N(f)=\frac{\nabla f}{\Vert\nabla f\Vert}$ são os vetores gradiente, tangente e normal, respectivamente.

A matriz $H(f)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$ é chamada de matriz hessiana, $Tr(H(f))=f_{xx}+f_{yy}$ é seu traço e $H^*=\begin{pmatrix} f_{yy} & -f_{xy} \\ -f_{yx} & f_{xx}\end{pmatrix}$.O gradiente da tangente $\nabla(T(f))=\begin{pmatrix} -f_{xy} & f_{xx} \\ -f_{yy} & f_{xy}\end{pmatrix}$. O Divergente de ∇f é dado por $div(\nabla f)=\frac{\partial}{\partial x}(f_x)+\frac{\partial}{\partial y}(f_y)$.

Fórmula mais comum	$k=-\frac{f_{xx}\cdot f_y^2-2f_{xy}\cdot f_x\cdot f_y+f_x^2\cdot f_{yy}}{((f_x)^2+(f_y)^2)^{3/2}}$	
Fórmulas menos comuns	$k=-\frac{T(f)*H(f)*T(f)^t}{\Vert\nabla f\Vert}$	$k=-\frac{\nabla f*H^*(f)*\nabla f^T}{\Vert\nabla f\Vert^3}$
	$k=-div\left(\frac{\nabla f}{\Vert\nabla f\Vert}\right)$	$k=\frac{T(f)*\nabla(T(f))*\nabla f^T}{\Vert\nabla f\Vert^3}$
	$k=\frac{\det\begin{pmatrix} H(f) & \nabla f^T \\ \nabla f & 0\end{pmatrix}}{\Vert\nabla f\Vert^3}$	$k=-\frac{\nabla f*H(f)*\nabla f^T-\Vert\nabla f\Vert^2 Tr(H(f))}{\Vert\nabla f\Vert^3}$

Referências

[1] M. P. do Carmo. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Sociedade brasileira de Matemática, 2005.

[2] R. Goldman. Curvature formulas for implicit curves and surfaces, Computer Aided Geometric Design, Volume 22, Issue 7, Pages 632-658 (October 2005).

[3] K. Tenenblat. Introdução à Geometria Diferencial, Fundação Universidade de Brasília, 1988.