 ISSN 1984-820X

Obtenção de funções diferenciáveis através de esquemas de subdivisão

Marline I. da Silva*
Acadêmica do curso de Matemática, CCNE, UFSM
97105-900, Campus Camobi, Santa Maria, RS
E-mail: marline.ilhadasilva@gmail.com

Alice J. Kozakevicius
Universidade Federal de Santa Maria - Departamento de Matemática
97105-900, Campus Camobi, Santa Maria, RS
E-mail: alice.kozakevicius@gmail.com

RESUMO

A motivação para este trabalho surgiu após um estudo preliminar [4] do algoritmo de subdivisão proposto por Harten em [2], que considera como dados iniciais uma quantidade finita de valores pontuais de uma função qualquer $y(t),\ t \in D_0 = \{\frac{m}{2^0}, m \in \mathbb{Z}\}$.

O esquema de subdivisão, realizado sobre racionais diáticos $D_n = \{\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}\}$, produz aproximações para valores da função $y(t)$ com $t \in D_{n+1} \setminus D_n$. Assim, no caso de subdivisão cúbica, são considerados a cada nível de resolução n, os pontos $t-3h$, $t-h$, $t+h$ e $t+3h$ em D_n, $h = 2^{-n-1}$, e o esquema de subdivisão é dado por:

$$y(t) = -\frac{1}{16}y(t-3h) + \frac{9}{16}y(t-h) + \frac{9}{16}y(t+h) - \frac{1}{16}y(t+3h), \tag{1}$$

sendo $\{-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}\}$ os filtros associados ao esquema interpolatório. Estes filtros são obtidos a partir do interpolador cúbico de Lagrange utilizando pontos igualmente espaçados, independentemente do valor de h (espaçamento entre os pontos do stencil de interpolação).

Algumas questões fundamentais surgem ao estudarmos o esquema (1):

- Se $p(t)$ for um polinômio com grau $g \leq 3$ e se os valores iniciais do esquema forem $y(m) = p(m), m \in D_n,\ n \in \mathbb{N}$, então a interpolação realizada por (1) para a sequência $(y(t))_{t \in D_{n+1}}$ será precisamente $y(t) = p(t), t \in D_{n+1}$, para qualquer nível de resolução $n \in \mathbb{N}$? E essa propriedade será válida se $t \in \mathbb{R}$?

- Se os dados iniciais para o esquema (1) forem $y(0) = 1$ e $y(m) = 0,\ m \in D_0$, existirá uma função limite obtida através deste esquema quanto maior for o nível de iterações do esquema (1)? Essa função será contínua? Será diferenciável?

- Seria possível obter valores de $y'(t)$ também através de um esquema do tipo (1)? Quais seriam então os filtros para este novo esquema? Quantos valores de y seriam utilizados?

As questões acima são apresentadas e respondidas por Dubuc no artigo "Interpolation through an Interative Scheme" publicado em 1986 [1]. Dubuc se preocupa com a formulação

*bolsista de Iniciação Científica FAPERGS n°.07503167

teórica e com resultados de suavidade para a função $F(t)$, denominada Interpolação Fundamental. A interpolação fundamental é a função limite gerada pelo esquema (1) quando começamos o processo de subdivisão com dados $y(0) = 1$ e $y(m) = 0$, $m \in D_0$ e aumentamos o número de níveis de resolução, $n \to \infty$.

Apesar dos filtros $\{-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}\}$ do esquema (1) terem sido obtidos a partir do interpolador cúbico de Lagrange, a função $F(t)$ não é um polinômio, mas é contínua e diferenciável, além disso, valem as seguintes propriedades:

- A função $F(t)$ se anula fora do intervalo (-3,3).
- Para $y(m)$, função sobre D_0, a extensão $y(t)$ sobre os racionais diáticos ($t \in D_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$) de acordo com o esquema (1) é $y(t) = \sum_{m=k-2}^{k+3} y(m)F(t-m)$, com k parte inteira de t. Além disso, $y(t)$ possui uma única extensão sobre os reais, também denotada por $y(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Neste trabalho, os resultados demonstrados em [1] são revisitados e para cada um deles, experimentos numéricos são apresentados com o objetivo de salientar e ilustrar sua relevância, além de enfatizarem algum ponto importante contido em suas demonstrações.

Dubuc também propõe um esquema de subdivisão para a derivada da extensão contínua da função inicial, cuja formulação é dada a seguir para $h = 2^{-n}$, $t \in D_n = \{\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}\},\ n \in \mathbb{N}$:

$$y'(t) = \frac{4}{3}[y(t+h) - y(t-h)]/(2h) - \frac{1}{3}[y(t+2h) - y(t-2h)]/(4h). \tag{2}$$

A partir destes resultados, finalmente podemos atacar problemas envolvendo a resolução de equações diferenciais, utilizando esquemas de subdivisão para aproximar o operador diferencial. Como próximo passo, estudaremos o artigo de Mani Mehra [3], que apresenta a resolução de equações diferenciais para problemas de pertubações singulares (elípticos e parabólicos) através de um método de diferenças finitas associado a esquemas de subdivisão. O problema de valor de contorno proposto por [3] e apresentado na sua formulação mais geral em [5] é dado por:

$$\begin{cases} -\epsilon y_\epsilon''(x) = f(x, y_\epsilon), \forall\ x \in I = [0,1], \\ y_\epsilon(0) = y_a,\ y_\epsilon(1) = y_b, \end{cases} \tag{3}$$

sendo $y_a,\ y_b \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial y_\epsilon} \geq c > 0,\ \forall\ x \in I,\ y_\epsilon \in \mathbb{R}$. $f(x, y_\epsilon) \in C^3(I\text{x}\mathbb{R})$ e o parâmetro ϵ assume valores positivos e pequenos, $0 < \epsilon \ll 1$. Neste trabalho serão apresentadas as soluções de problemas simplificados para esta formulação geral, considerando o parâmetro ϵ como sendo 10^{-3} e 10^{-8}, reproduzindo os testes realizado em [3].

Palavras-chave: *Esquema de Subdivisão, Diferenciabilidade e Continuidade, Equações diferenciais*

Referências

[1] S. Dubuc, "Interpolation through an Interative Scheme", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114 (1986) 185-204.

[2] A. Harten, "Multiresolution Algorithms for the Numerical Solution of Hyperbolic Conservation Laws", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48 (1995) 1305-1342.

[3] M. Mehra, "Wavelet optimized finite difference method using interpolating wavelets for solving singulary perturbed problems", *Journal of Wavelet Theory and Applications*, 1 (2007) 83-96.

[4] M. I. Silva, "Análise multiresolução e subdivisão para médias celulares", Trabalho de graduação, XXXI CNMAC, (2008).

[5] R. Vulanovié, "On Numerical methods for quasilinear singular perturbation problems without turning points", *Review of Research , Faculty of Science, Mathematics Series* , 1 (1993) 361-370.