Anais do CNMAC v.2 ISSN 1984-820X

Coloração Total dos Grafos Snarks

Poly Hannah da Silva
Instituto de Matemática, UFF
24.020-140, Campus do Valonguinho, Niterói, RJ
E-mail: poly.hannah@gmail.com

Simone Dantas
Instituto de Matemática - Departamento de Análise, UFF
24.020-140, Campus do Valonguinho, Niterói, RJ
E-mail: sdantas@im.uff.br

RESUMO

Em 1852, o matemático Francis Guthrie após colorir mapas utilizando apenas quatro cores, de modo que distritos adjacentes recebessem cores diferentes, conjecturou que quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa, colorindo distritos adjacentes com cores distintas. Esta conjectura foi divulgada para a sociedade matemática e ficou conhecida como a conjectura das quatro cores. Por mais de cem anos, matemáticos de todas as partes tentaram demonstrar tal conjectura e com isso foram desenvolvidos diversos conceitos e teorias dentro da matemática. Uma destas teorias foi a Teoria dos Grafos.

Um mapa pode ser representado por um grafo associando cada ponto de interseção das regiões do mapa a um vértice e cada fronteira das regiões a uma aresta, como na figura abaixo.

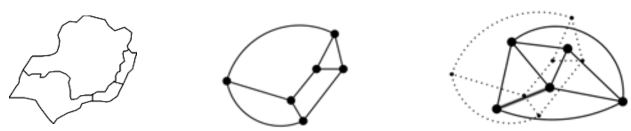

Figura 1: Representação, começando a esquerda, de um mapa, do grafo associado e do grafo dual.

Assim, na Teoria dos Grafos, um *mapa* é um grafo planar conexo e sem pontes, onde *grafo planar* é um grafo que pode ser desenhado de modo que nenhuma aresta se cruze e *pontes* são arestas que se removidas torna o grafo desconexo. As regiões delimitadas pelas arestas, que são as regiões do mapa, são chamadas de *faces*. Qualquer grafo planar pode ser associado a um outro grafo, chamado de *grafo dual*, onde cada vértice representa cada face do grafo planar, as regiões do mapa, e cada par de vértices será ligado por uma aresta se as faces que eles representam forem adjacentes, ou seja, se as regiões do mapa fizeram fronteira. O *grau* de um vértice v é o maior número de arestas incidentes a v. Representamos por Δ o grau máximo de G, ou seja, o maior grau dentre os graus de todos os vértices. Dizemos que um grafo é *k-regular* quando todos os seus vértices possuem grau igual a k.

Uma *k-coloração das arestas* de um grafo $G=(V(G),E(G))$ é uma função c de $E(G)$ em $\{1,..., k\}$ tal que $c(e)$ é diferente de $c(f)$ sempre que as arestas e e f forem adjacentes. O *índice cromático* de G é o menor k tal que G admite uma k-coloração das arestas. Em 1964, Vizing provou que, dado um grafo G, o índice cromático de G é Δ (grafo classe 1) ou $\Delta+1$ (grafo classe 2).

Por volta de 1880, Tait provou que a conjectura das quatro cores é equivalente a afirmar que todo mapa 3-regular tem índice cromático igual a 3. Isto é, a conjectura das quatro cores é equivalente a afirmar que todo grafo planar 3-regular sem pontes é de classe 1. Esta equivalência motivou a procura de grafos 3-regulares que fossem de classe 2 com o objetivo de exibir um contra-exemplo para a conjectura das quatro cores. Durante a procura de tal contra-exemplo, despertou-se o interesse pelo estudo de grafos 3-regulares de classe 2 que não fosse imediato saber que são de classe 2. Todo grafo 3-regular que possui pontes é sobrecarregado (um grafo *G* é sobrecarregado se dado um subgrafo *H* com $\Delta(H)=\Delta(G)$, o número de arestas de H excede $\Delta(G)\lfloor n(H)/2 \rfloor$, onde *n(H)* é o número de vértices de *H*). Como grafos sobrecarregados são de classe 2, passou-se a procurar então, grafos 3-regulares de classe 2 que não são sobrecarregados. Estes grafos foram chamados de *snarks*. O nome snark foi dado pelo matemático americano Martin Gardner em 1976, depois do misterioso e indefinível objeto do poema "The Hunting of the Snark" de Lewis Carroll, pela dificuldade de se encontrar tais grafos.

O primeiro snark conhecido foi o grafo de Petersen, em 1898, que permaneceu como o único até 1946, quando Blanusa descobriu mais dois snarks. Mais tarde, vieram a descoberta de um snark por Tutte e outro por Szekeres. Em 1975, Isaacs [3] generalizou os métodos de Blanusa, descobrindo duas famílias infinitas de snarks, que incluíam todos os snarks conhecidos até então, e descobriu um novo snark, chamado de double star não incluído nestas famílias.

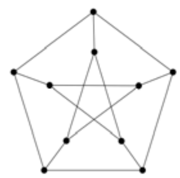

Figura 2: Grafo de Petersen, o primeiro snark conhecido.

O estudo dos snarks torna-se interessante quando eles são não triviais, ou seja, quando possui *cintura* (comprimento do menor ciclo do grafo) pelo menos 5 e é *ciclicamente 4-aresta-conexo* (onde ciclicamente *k*-aresta-conexo significa que é necessário remover pelo menos *k* arestas para que cada componente conexa possua pelo menos um ciclo), pois caso contrário, ele pode ser sempre contraído gerando snark menor.

Uma *coloração total* de um grafo *G* é uma coloração na qual vértices adjacentes, arestas adjacentes e arestas incidentes em vértices possuem cores distintas. O *número cromático total* é o menor valor para o qual o grafo *G* possui uma coloração total. Vizing (1964), conjecturou que, analogamente ao caso de coloração de arestas, os grafos poderiam ser classificados segundo o número cromático total: $\Delta+1$ (grafo tipo 1) ou $\Delta+2$ (grafo tipo 2).

No trabalho [1], foi obtida a coloração total da família dos snarks flor, mostrando que estes grafos são do tipo 1. Por outro lado, utilizando o auxílio do computador, [2] provou que todo snark com número de vértices menor que 30 são do tipo 1, mas nenhuma coloração foi apresentada. Neste trabalho, mostraremos a coloração total de alguns snarks de ordem menor do que 30. Desta forma, pretendemos contribuir para a coloração total dos snarks e da prova da conjectura da coloração total.

Agradecimentos: A aluna Poly Hannah da Silva possui bolsa de iniciação científica PIBIC/ CNPq, instituição de apoio à pesquisa que financia este projeto.

Palavras-chave*: Matemática discreta, Teoria dos Grafos, Coloração.*

Referências

[1] C. N. Campos, "O Problema da Coloração Total em Classes de Grafos", Tese de Doutorado, IC-Unicamp, 2006.

[2] A. Cavicchioli, T. E. Murgolo, B. Ruini, F. Spaggiari, Special classes of snarks, Acta Applicandae Mathematicae, vol.76, pp. 67-88, (2003).

[3] R. Isaacs, Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not Tait colorable, American Mathematical Monthly, vol.82, pp.221-239, (1975).