

# Aplicação do Método dos Elementos Finitos Mistos e Híbridos na Obtenção da Velocidade de Darcy – Sistema Linear Resultante Resolvido pelo Método dos Gradientes Conjugados

**César Guilherme de Almeida**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática  
38408-100, Uberlândia, MG  
E-mail: cesargui@ufu.br

**Ernani Magno de Freitas Júnior**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática  
38408-100, Uberlândia, MG  
E-mail: Ernani\_mat@yahoo.com.br

## RESUMO

A lei descoberta, em 1856, pelo engenheiro Henry D'Arcy é comumente empregada em problemas envolvendo modelagem de diversos regimes de escoamentos de fluidos em meios porosos. Esta lei estabelece a relação básica entre a taxa volumétrica do fluxo ( $Q$ ) e o gradiente de pressão ( $\nabla p$ ), afirmando que a taxa volumétrica é diretamente proporcional ao gradiente de pressão do fluido e à área ( $A$ ) da seção transversal normal à direção do fluxo e inversamente proporcional à viscosidade ( $\mu$ ) do fluido. Isto permite definir o conceito de permeabilidade ( $K$ ), que quantifica a capacidade do meio poroso em transportar fluido. Desprezando-se efeitos gravitacionais, a velocidade superficial do fluido é dada por

$$u = Q/A = -(K/\mu) \nabla p. \quad (1)$$

Simulações numéricas com alto desempenho, envolvendo cálculos apurados da velocidade de Darcy (1), são essenciais para se obter uma descrição precisa de fenômenos multiescala em escoamentos multifásicos e monofásicos em meios porosos, tais como problemas de contaminação de aquíferos e processos de recuperação secundária e terciária de petróleo. Isto justifica a obtenção de métodos numéricos eficientes, de baixo custo computacional e de rápida convergência.

As técnicas de discretização utilizadas neste trabalho são aplicadas em uma equação elíptica,

$$\nabla \cdot u = q \quad (q \text{ é um termo de fonte}), \quad (2)$$

associada ao deslocamento de dois fluidos miscíveis e incompressíveis; mas também se aplicam em equações provenientes de outros tipos de escoamento em meios porosos.

Seguindo a mesma técnica sugerida em ([2]) Chavent e Roberts (1992), a discretização da equação da pressão (2) usa elementos finitos mistos e híbridos (veja o artigo [3] de Douglas, Furtado e Pereira, 1997 – escoamento imiscível –, e [1] de Almeida, Douglas e Pereira, 2002 – escoamento miscível).

As formulações fracas das equações (1) e (2), juntamente com o auxílio de espaços adequados de Raviart-Thomas (veja [1], [2] e [3]), permitem construir um sistema linear associado ao problema discretizado. Os detalhes computacionais relacionados à solução deste sistema linear,

tais como fatoração de matriz simétrica e definida positiva, Método dos Gradientes Conjugados e construção de pré-condicionadores, também são apresentados neste trabalho.

**Palavras-chave:** *Elementos finitos, Métodos numéricos, Equações diferenciais parciais*

**Referências**

- [1] ALMEIDA, César, DOUGLAS JR., Jim e PEREIRA, Felipe, A new characteristics-based numerical method for miscible displacement in heterogeneous formations. *Comp. Appl. Math.* Vol. 21, pp.573-605 (2002).
- [2] CHAVENT, G. e ROBERTS, J. F., A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite elements and standard finite difference approximations for the determination of velocities in waterflow problems. *Adv. Water Resources*, vol.14, n.6, pp. 329-348 (1991).
- [3] DOUGLAS JR., Jim, FURTADO, Frederico e PEREIRA, Felipe, On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs. *Computational Geosciences*, vol. 2, n.1, pp. 155–190 (1997).