ISSN 1984-820X

Aplicação dos Métodos de Newton no Cálculo da Carga Crítica de Euler em Colunas do Tipo Engastada-Articulada

Cristiano Gabriel Persch
cristianog.persch@bol.com.br

Diego Trevisol
dtrevisol@hotmail.com

André Luis Christoforo
alchristoforo@yahoo.com.br

Depto Engenharia Civil, Universidade do Estado de Mato Grosso, UNEMAT, 78550-000, Sinop – MT

RESUMO

O matemático Leonhard Euler, em meados do século XVIII, determinou analíticamente uma expressão para o cálculo da força crítica "P_{cr}" (ou limite) de compressão em colunas bi-articuladas, mediante a resolução da equação diferencial que contempla o modelo de *Vigas de Bernoulli*[1].

Na engenharia de estruturas, sub-área da engenharia civil, em geral, os elementos estruturais são projetados de maneira a se evitar o fenômeno de instabilidade, que surge para valores de forças de compressão acima do valor crítico. A força crítica de colunas depende fortemente da geometria da seção transversal do elemento estrutural (momento de inércia), do módulo de elasticidade do material e da forma como o mesmo é vinculado (forma de fixação). Para colunas vinculadas por apoios (não impedem o giro da peça), como é o caso do problema proposto e resolvido por Euler, a 1ª carga crítica é obtida por intermédio de métodos analíticos de cálculo. Em se tratando de colunas engastadas-articuladas, a determinação da força crítica requer o emprego de métodos aproximados de cálculo.

Em geral, na literatura atual referente à Mecânica dos Materiais, a solução da equação diferencial (função campo de deslocamentos) não é abordada em detalhes, apresentando pequenos trechos do seu desenvolvimento e, indicando, na maior parte, a "metodologia de tentativas" para o cálculo de P_{cr}. Neste contexto, o presente trabalho objetiva a aplicação de métodos determinísticos, em particular os Métodos de Newton (Newton com aproximação linear (MNL), Newton fixo (MNLF) com aproximação linear e Newton com aproximação quadrática (MNQ) na resolução da equação não-linear para o cálculo da força crítica de colunas, com o intuito de se verificar a eficiência de ambos e evidenciar suas restrições. A equação diferencial que contempla o problema de instabilidade de colunas engastadas-articuladas é expressa por:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \alpha^2 v(x) = -\frac{H_A x}{EI} \tag{1}$$

onde, *v(x)* denota a função deslocamento na ordenada "x" ao longo do domínio da barra, e *P* a força aplicada no centro de gravidade da seção transversal da peça, H_A a reação horizontal que surge no apoio fixo e $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ um parâmetro utilizado que relaciona a força *P*, o módulo de deformação longitudinal *E* e o momento de inércia *I* da seção transversal.
A equação (1) é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes, cuja solução é expressa por:

$$v(x) = C_1 cos\alpha x + C_2 sen\alpha x - \frac{H_A x}{P} \tag{2}$$

As constantes C_1, C_2 e o valor de H_A da equação (2) são obtidos mediante a imposição de três condições de contorno, sendo: *v(0)=0*, *v(l)=0* e $\frac{dv(x)}{dx}(x = l) = 0$. A aplicação das condições de contorno juntamente com algumas simplificações algébricas, dão origem à equação:

$$tg(\alpha.L) = \alpha.L \tag{3}$$

Realizando-se uma substituição de variáveis na equação (3) e reescrevendo-a na forma de função ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), temos:

[1] *Vigas onde as seções transversais permanecem planas e ortogonais ao eixo da barra antes e após a sua deformação.*

$$f(x) = tg(x) - x, \qquad x > 0 \tag{4}$$

O valor da força crítica de compressão para colunas articuladas-engastadas é expresso por $P_{cr} = (E \cdot I \cdot x^2)/L^2$, sendo x solução da equação (4).

Algumas versões dos Métodos de Newton aplicados na resolução de problemas de otimização podem ser encontradas no trabalho de Christoforo [2]. Estes métodos são fundamentados no desenvolvimento em Séries de Taylor da função f nas vizinhanças de um ponto, tendo suas versões no truncamento dos termos da mesma. As equações de recorrência dos métodos de Newton aqui utilizados MNL, MNLF e MNQ são expressas respectivamente por:

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} \cdot f(x_k) \qquad x_{k+1} = x_k - (f'(x_0))^{-1} \cdot f(x_k) \qquad x_{k+1} = x_k - (f''(x_k))^{-1} \cdot f'(x_k)$$

É importante observar que no MNLF, a derivada é avaliada apenas sobre a estimativa inicial aferida, mantendo-se constante ao longo do processo iterativo.

Para a avaliação da eficiência destes métodos no cálculo da raiz da equação (4), foram desenvolvidos três programas na plataforma do software *Mathcad 2000*. As Figuras 1 e 2 ilustram respectivamente os gráficos das seqüências de valores geradas pelos métodos confrontando número de iteração com raiz aproximada e número de iteração com o erro associado, partindo-se de uma estimativa inicial x_0=4,71 e tolerância igual a ε=1.10^{-5}.

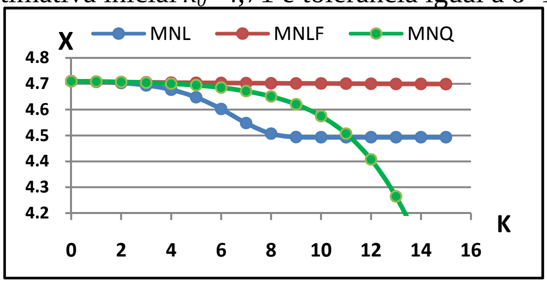

Figura 1: Iteração x raiz aproximada.

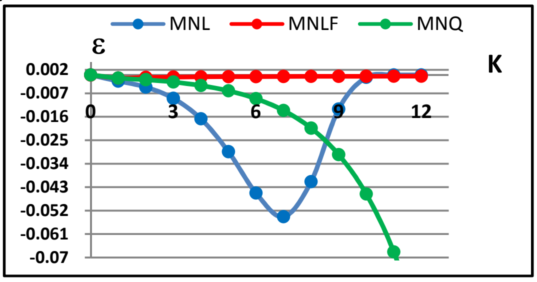

Figura 2: Iteração x erro.

Várias tentativas foram realizadas na busca da solução do problema e, para estimativas iniciais muito próximas e inferiores a 4,71, os Métodos de Newton Linear (MNL) e Fixo (MNLF) apresentaram convergência, porém, o MNL necessitou de doze iterações para a determinação da raiz aproximada, já, o MNLF, de 693, assim como esperado segundo a ordem de convergência de ambos os métodos. O emprego *direto* do MNQ (com ordem de convergência cúbica) para determinação da raiz do problema não apresentou ser eficiente devido à quantidade de estimativas iniciais utilizadas para a determinação de uma seqüência de valores convergentes. Uma forma alternativa de resolver este problema seria a utilização de métodos híbridos, como a utilização do MNF como estratégia de cálculo para a determinação de uma estimativa inicial mais próxima do problema e a partir desta nova estimativa, empregar o MNQ. Portanto, o MNF segundo a abordagem aqui utilizada mostrou ser o mais eficiente dentre os demais e a solução encontrada para o problema, segundo a tolerância pré-definida, é igual a 4,4934. Dessa forma, a expressão para o cálculo da carga crítica é $P_{cr} = (E \cdot I \cdot 4{,}4934^2)/L^2$.

Palavras-Chave: *Flambagem, Carga Crítica, Métodos de Newton.*

Referências Bibliográficas

[1] J.M. Gere, “Mecânica dos Materiais”, Tradução de Luiz Fernando de Castro Paiva. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.

[2] Christoforo. A. L., Análise do comportamento não-linear em estruturas planas do tipo treliça. I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. I ERMAC. Bauru, São Paulo, (2008).