ISSN 1984-820X

Cálculo de Curvatura de Curvas de Nível

Tiago H. P. da Silva* **Osmar Aléssio†**
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP - Departamento de Matemática
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: tiagohenrique.mat@aluno.feis.unesp.br, osmar@mat.feis.unesp.br

RESUMO

Curvas de Nível

Curvas podem ser descritas por equações cartesianas $f(x, y) = c$, onde f é uma função de x e y em $c \in \mathbb{R}$. Deste ponto de vista uma curva é o conjunto de pontos $C : \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$ que satisfazem a equação $f(x, y) = c$. Neste trabalho de iniciação científica, pretendemos estudar uma fórmula de curvatura particular que aparece no artigo [2]. Pretende-se estender esta fórmula de curvatura de curva plana para curva plana no espaço, isto é, a curva de interseção de uma superfície com o plano $z = c$. A fórmula apresentada no teorema 2 vale para qualquer $g(x, y, z) = c$, porém por ser um trabalho de iniciação científica e estar no início de trabalho, vamos nos ater para $g(x, y, z)$ ser um plano.

Definição 1 ***(Curvas Implícitas)*** *A curva implícita é o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem a equação $f(x, y) = c$, isto é, $C : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$.*

O vetor $\nabla f = (f_x, f_y)$ é o vetor gradiente e o vetor $Tan(f) = (f_y, -f_x)$ é o vetor tangente a curva de nível. A matriz $\nabla(Tan(f)) = \begin{bmatrix} f_{yx} & -f_{xx} \\ f_{yy} & -f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{yx} & f_{yy} \\ -f_{xx} & -f_{xy} \end{bmatrix}^T$ é gradiente aplicado no tangente. Os simbolos $*$ e $\times$ são o produto de matrizes e o produto vetorial, respectivamente.

Teorema 1 *(Goldman) A curvatura da curva implícita $C : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ é:*

$$k = \frac{\left|Tan(f) * \nabla\left(Tan(f)\right) \times Tan(f)^T\right|}{\|(f_y\ ,\ -f_x)\|^3}$$

Definição 2 *A curva de nível da função vetorial $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$, é dada por: $C : f^{-1}((c_1, c_2)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = (c_1, c_2)\}$, isto é,$[f(x, y, z) = c_1] \cap [g(x, y, z) = c_2]$.*

A curva de nível c_2 da função $z = f(x, y)$, pode ser escrita como o conjunto de nível $c = (0, c_2)$ de F dada por $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (f(x, y, z), z)$, isto é, $F^{-1}(0, c_1) = \{(x, y, z) \mid (f(x, y, z), z) = (0, c_2)\}$, isto é, $(f(x, y, z) = 0) \cap (z = c_2)$.

Curvas mais gerais em $\mathbb{R}^3$ podem ser definidas pelo conjunto de pontos que satisfaçam ao mesmo tempo o par de equações $f(x, y, z) = c_1 \cap g(x, y, z) = c_2$. Como dito acima, a superfície $g(x, y, z) = z = c_2$ será um plano.

Teorema 2 *A curvatura da curva de nível $(f(x, y, z) = 0) \cap (g(x, y, z) = c)$, quando $g(x, y, z) = z = c$ é dada por*

$$k = \frac{|(\nabla f \times \nabla g) * \nabla(\nabla f \times \nabla g) \times (\nabla f \times \nabla g)|}{\|(\nabla f \times \nabla g)\|^3}$$

*Aluno de Iniciação Científica
†Professor Orientador

Prova: Temos que a curvatura para curvas implícitas no plano é dada por

$$k = \frac{\left|Tan(f) * \nabla\left(Tan(f)\right) \times Tan(f)^T\right|}{\|(f_y\ ,\ -f_x)\|^3}$$

$$k = \frac{(f_y, -f_x) * \begin{bmatrix} f_{yx} & -f_{xx} \\ f_{yy} & -f_{xy} \end{bmatrix} \times (f_y, -f_x)^T}{\|(f_y, -f_x)\|^3},$$

se acrescentarmos zeros na terceira coordenada, tem-se

$$k = \frac{(f_y, -f_x, 0) * \begin{bmatrix} f_{yx} & -f_{xx} & 0 \\ f_{yy} & -f_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times (f_y, -f_x, 0)^T}{\|(f_y, -f_x, 0)\|^3},$$

como $(f_y, -f_x, 0) = \nabla f \times (0,0,1)$, tem-se

$$k = \frac{(\nabla f \times (0,0,1)) * \nabla(\nabla f \times (0,0,1)\ ) \times (\nabla f \times (0,0,1))}{\|\nabla f \times (0,0,1)\|^3},$$

e $\nabla g = (0,0,1)$, tem-se

$$k = \frac{|(\nabla f \times \nabla g) * \nabla(\nabla f \times \nabla g) \times (\nabla f \times \nabla g)|}{\|(\nabla f \times \nabla g)\|^3}.$$

Exemplo 1 *Seja dado o cilindro de raio R, por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ e o plano no nível c, por $g(x, y, z) = z = c$. A interseção $f \cap g$ nos fornece as curvas de nível de f no nível c.*

$$\nabla f = (2x, 2y, 0)\ ,\ \nabla g = (0,0,1)\ \ e\ \nabla f \times \nabla g = (2y, -2x, 0)$$

$$\nabla(\nabla f \times \nabla g) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ \ e\ \ (\nabla f \times \nabla g) * \nabla(\nabla f \times \nabla g) = (-4x, -4y, 0)$$

$$[(\nabla f \times \nabla g) * \nabla(\nabla f \times \nabla g)] \times (\nabla f \times \nabla g) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4x & -4y & 0 \\ -2y & 2x & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, 8\left(x^2 + y^2\right)\right)$$

$$\|[(\nabla f \times \nabla g) * \nabla(\nabla f \times \nabla g)] \times (\nabla f \times \nabla g)\| = 8\left(x^2 + y^2\right) = 8R^2$$

$$\|(\nabla f \times \nabla g)\| = \sqrt{4y^2 + 4x^2} = 2\sqrt{y^2 + x^2} = 2R$$

$$k\,(x, y) = \frac{\|[(\nabla f \times \nabla g) * \nabla(\nabla f \times \nabla g)] \times (\nabla f \times \nabla g)\|}{\|(\nabla f \times \nabla g)\|^3} = \frac{8R^2}{8R^3} = \frac{1}{R}$$

Referências

[1] M. P. do Carmo. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Sociedade brasileira de Matemática, 2005.

[2] R. Goldman. Curvature formulas for implicit curves and surfaces. Computer Aided Geometric Design, 22(2005) 632-658, 2005.

[3] K. Tenenblat. Introdução à Geometria Diferencial, Fundação Universidade de Brasília, 1988.