 ISSN 1984-820X

Resposta Impulso e Desacoplamento na Solução de Equações do Movimento

Daniela de R. Tolfo*
Departamento de Matemática, UFSM,
97105-900, Santa Maria, RS
E-mail: danitolfo.cp@hotmail.com

Rosemaira D. Copetti
Universidade Federal de Santa Maria - Departamento de Matemática
97105-900, Campus Camobi, Santa Maria, RS
E-mail: rmaira@smail.ufsm.br

RESUMO

O estudo de equações diferenciais de segunda ordem é de constante interesse em várias áreas da matemática aplicada e engenharia, tais como, sistemas mecânicos, máquinas sujeitas a vibrações, aeronaves, automóveis, entre outras. Neste trabalho foram estudados e comparados graficamente alguns métodos encontrados na literatura para se obter a solução de problemas denominados não-clássicos, problemas não desacopláveis através da análise modal. Consideremos a equação de segunda ordem do movimento

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{1}$$

onde a matriz de massa M, a matriz de amortecimento C e a matriz de rigidez K são de ordem $n \times n$, reais, simétricas e positivas definidas, $f(t)$ é o vetor força externa de ordem $n \times 1$ e $x(t)$ é o vetor deslocamento. A resposta forçada de (1) pode ser obtida pelo método do espaço de estado ou através do método operacional escrita em termos da convolução, isto é

$$x(t) = (\dot{\mathbf{h}}(t)M + \mathbf{h}(t)C)x_0 + \mathbf{h}(t)M\dot{x}_0 + \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

onde $\mathbf{h}$ é a resposta impulso do problema (1) com condições iniciais $x(0) = 0$ e $M\dot{x}(0) = I$.

A resposta impulso pode ser calculada pela expressão

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{2n-j}$$

onde b_i são os coeficientes do polinômio característico $p(s) = s^2M + sC + K$, $d(t)$ é a função que satisfaz um problema de valor inicial e h_k satisfaz uma equação matricial em diferenças associada a (1). Para maiores detalhes, veja-se [2], [1].

Em [3] a resposta impulso associada a problemas não clássicos é dada por (2) sendo λ_k os autovalores, u_k os autovetores do problema direto, v_k os autovetores do problema adjunto e γ_k constante

$$h(t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} u_k v_k^*. \tag{2}$$

*bolsista de Iniciação Científica FAPERGS n°08505962

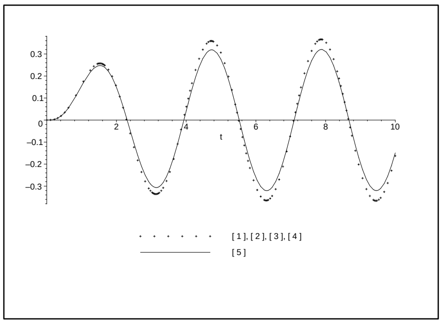

Figura 1: Comparação das soluções obtidas pelos diferentes métodos

Através do teorema modal é possível escrever (1) como um sistema de coordenadas normais. Considerando Φ a matriz modal não amortecida ortogonal e $x(t) = \Phi q(t)$, obtém-se

$$\ddot{q}(t) + C^{*}\dot{q}(t) + \Omega^{2}q(t) = g(t), \quad q_0 = \phi^{T}Mx_0,\ \dot{q}_0 = \Phi^{T}M\dot{x}_0 \qquad (3)$$

onde $q(t)$ é o vetor coordenada normal, $I = \Phi^{T}M\Phi$, $\Omega^{2} = \Phi^{T}K\Phi$, $C^{*} = \Phi^{T}C\Phi$, $g(t) = \Phi^{T}f(t)$, e Ω é a matriz diagonal cujas as entradas são as frequências naturais do sistema não amortecido. Quando C é atrito proporcional, fraco ou os termos $M^{-1}C$ e $M^{-1}K$ comutam é possível desacoplar também o termo $C^{*} = \Phi^{T}C\Phi$. Caso contrário o amortecimento viscoso é dito não-clásssico. Para desacoplar o termo de amortecimento, [4] realiza uma transformação de coordenadas ortogonais através de uma matriz P pela substituição de $q(t) = Pr(t)$, de forma que as n equações de movimento em $r(t)$ tenham termos de acoplamento desprezíveis e então despreza-se os elementos fora da diagonal de $C^{**} = P^{T}C^{*}P$ e de $K^{**} = P^{T}K^{*}P$. Em [5], é sugerida a eliminação dos elementos fora da diagonal na matriz C^{*}, resultando então um sistema desacoplado. Para efeitos de comparação, consideramos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} 1.559 & -0.2 \\ -0.2 & 1.6 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} 3.8 & 0 \\ 0 & 4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} sen(2t)$$

com condições iniciais nulas.

Na Fig.(1) apresentam-se os resultados das simulações, onde observa-se que o método proposto por [5], mesmo para um sistema considerado subamortecido, apresenta um erro em relação aos demais métodos estudados.

Os autores agradecem ao apoio FAPERGS.

Palavras-chave: *Resposta Impulso, Método Modal, Amortecimento*

Referências

[1] J. R. Claeyssen, G. C. Suazo, C. Jung, A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations applied numerical mathematics, *Journal of Sound and Vibration*, 39 (1999) 65-78.

[2] J. R. Claeyssen, T. Tsukazan, “Dynamic solutions of linear matrix differential equations”, *Quart. App. Math*, Vol. XLVIII (1), (1990).

[3] R.D. Copetti, ”Sistemas Concentrados e Distribuídos através da Análise Modal Adjunta ”, Tese de Doutorado, PROMEC - UFRGS, 2002.

[4] S. F. Felszeghy, On uncoupling and solving the equations of motion of vibrating linear discrete systems, *Journal of Apllied Mechanics*, 60 (1993) 456-462.

[5] S. M. Shahruz, F. Ma, Approximate decoupling of the equations of motion of linear under-damped systems, *Journal of Apllied Mechanics*, 55 (1988) 716 -720.