 ISSN 1984-820X

Simulação numérica de escoamentos incompressíveis na formulação ζ-ψ via método dos elementos finitos

Felipe Montefuscolo[1*] Fabrício Simeoni de Sousa[2]
[1]Instituto de Física de São Carlos - USP
[2]Intituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
13560-970, São Carlos, SP
Email: felipe.mt87@gmail.com, fsimeoni@icmc.usp.br

30 de abril de 2009

RESUMO

As equações que modelam os escoamentos incompressíveis, as equações de Navier-Stokes, apresentam desafios do ponto de vista numérico quando estão nas variáveis primitivas (velocidade $\boldsymbol{u}$ e pressão P). Além de estarem presentes termos fortemente não lineares em tais equações, não há uma equação que exprima a variação temporal da pressão. Uma alternativa de se contornar este último problema é adotar a formulação em variáveis não primitivas (vorticidade ζ e função de corrente ψ), na qual a variável pressão é eliminada em razão da própria natureza das definições das novas variáveis. A vorticidade e a função corrente, correspondentes a um escoamento bidimensional no plano xy, são definidas como

$$\zeta(\boldsymbol{x},t) \equiv \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{k} \qquad \psi(\boldsymbol{x},t) - \psi_O \equiv \int_O^P \boldsymbol{k} \cdot [\boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{x}],$$

onde $\boldsymbol{k}$ é o vetor unitário usual do espaço $\mathbb{R}^3$, ψ_O é uma constante e $d\boldsymbol{x}$ é o vetor tangente a uma curva arbitrária que une os pontos de referência O e P. A partir dessas definições, as equações de Navier-Stokes na forma adimensional, juntamente com a condição inicial e as condições de contorno, ficam

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = \dfrac{1}{Re}\nabla^2 \zeta \\ \zeta = -\nabla^2 \psi \\ \psi|_S = a(s,t), \qquad \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial n}\right|_S = b(s,t) \\ \zeta|_{t=0} = \boldsymbol{k} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u}_0 \end{cases} \tag{1}$$

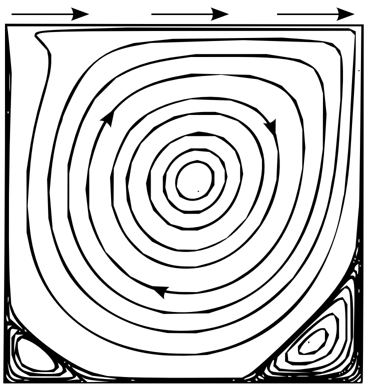
onde Re é o número de Reynolds, S é o contorno do domínio, s a coordenada ao longo de S [1].

A dificuldade da formulação ζ-ψ, como se pode ver nas equações de (1), é que não há condições sobre a vortidade no contorno ao passo que para a função de corrente há duas condições. Para resolver este problema, é adotado aqui o método acoplado, que se trata de resolver as equações de (1) simultaneamente [2].

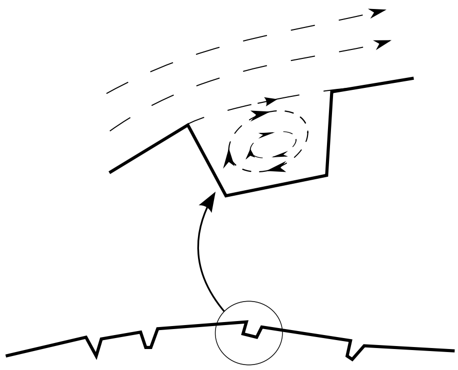
*bolsista de iniciação científca FAPESP

Neste trabalho, as simulações dos escoamentos incompressíveis são feitas aproximando as soluções de (1) pelo método dos elementos finitos. O domínio é representado por uma malha não estruturada de elementos finitos triangulares, com funções de interpolação quadráticas. Visando o maior desempenho computacional possível, foi adotado o PETSc [3], uma biblioteca de computação numérica de larga escala que explora o paralelismo.

A metodologia é validada comparando os resultados obtidos de problemas modelos com os de outros artigos. Por exemplo, os resultados obtidos do clássico problema da cavidade impulsionada (veja figura (a)) é comparado com os resultados de [4]. Uma motivação para o estudo da cavidade na comunidade biológica, são os vales que alguns insetos (como a libélula) possuem na asa [5], como ilustra a figura (b):



(a) Função de corrente para a cavidade impulsionada para $Re = 1000$



(b) Ilustração de uma vorticidade sendo criada em uma cavidade da asa de um inseto

Palvras-chave: *Escoamentos incompressíveis, Formulação vorticidade - função de corrente, Método dos elementos finitos, Condições de contorno*

Referências

[1] L. Quartapelle. *Numerical Solution of the incompressible Navier-Stokes equations.* Birkhüser, 1993.

[2] M. Napolitano, G. Pascazio, and L. Quartapelle. A review of vorticity conditions in the numerical solution of the $\zeta - \psi$ equations. *Computers & Fluids*, 28:139–185, 1999.

[3] Satish Balay, Kris Buschelman, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matthew G. Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, and Hong Zhang. PETSc Web page, 2001. http://www.mcs.anl.gov/petsc.

[4] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multgrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.

[5] Antonia B. Kesel. Aerodynamic characteristics of dragonfly wing sections compared with technical aerofoils. *The Journal of Experimental Biology*, 203:3125–3135, 2000.