ISSN 1984-820X

Formulação Hamiltoniana do Sistema Dinâmico Pêndulo Elástico Excitado Verticalmente no Suporte

Eduardo Lima de Oliveira
UE Profº. Emygdio de Barros
05363-000, São Paulo, SP.
edlima.aquifero@gmail.com

Souza Junior, J. D. R.
Universidade de São Paulo, Brasil.
jesse.rebello@poli.usp.br

RESUMO

O pêndulo elástico é um sistema mecânico constituído de um suporte com excitação vertical periódica, uma mola de constante elástica **k** e uma massa **m**. Uma extremidade da mola é presa ao suporte e a outra extremidade esta presa à massa. Nesse trabalho apresentados o sistema de equações canônicas de Hamilton, que foram obtidas a partir da função lagrangeana e momentos generalizados.

Palavras-chave: *Mecânica Hamiltoniana, Dinâmica não linear, Pêndulo elástico.*

1. Equações de Movimento de Hamilton

Considerando a função lagrangeana do sistema dinâmico, obtida com a diferença entre energia potencial e energia cinética. Admensinados os parâmetros, temos;

$$L = \frac{1}{2}\left[(1+q_2)\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{u}^2 + 2\dot{q}_2\dot{u}\cos q_1 - 2\dot{u}(1+q_2)q_1 sen q_1\right] + \nu^2(1+q_2)\cos q_1 - \nu^2 u + \frac{\kappa}{2}q_2^2 + \frac{\varepsilon}{4}q_2^4 \quad (1)$$

onde q_1, q_2 representam o ângulo do pêndulo o estiramento ou compressão da mola, κ, ν são relacionadas as freqüências naturais da mola e do pêndulo respectivamente. u é à força de excitação externa ao sistema que pode ser tomada como sendo periódica e não afetada pelo movimento do pêndulo [2].

Se perseguirmos a idéia do que seria o *momento generalizado* para obtenção da função hamiltoniana, ou seja, sem formalidades matemáticas, chegamos nas equações abaixo;

$$\begin{cases} \dfrac{p_1}{(1+q_2)^2} = \dfrac{1}{(1+q_2)^2}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 - \dfrac{\dot{u} sen(q_1)}{1+q_2} \\ \\ p_2 = \dot{q}_2 + \dot{u}\cos(q_1) \end{cases} \quad (2)$$

com o espaço de fases constituído pelas coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2).

Aplicando a transformada de Legendre em (1), substituindo (2), e fazendo $u = 0$ vamos obter a função hamiltoniana para o pêndulo elástico *sem a excitação vertical* no suporte, que no caso é, uma simplificação do sistema descrito por (1).

A função hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{p_1}{1+q_2}\right)^2 + p_2{}^2 - \nu^2(1+q_2)\cos q_1 - \frac{\kappa}{2}q_2^2 - \frac{\varepsilon}{4}q_2^4 - \\ &- \nu^2 u + \left(\frac{p_1 sen q_1}{1+q_2} + p_2\cos q_1\right) \end{aligned} \quad (3).$$

Daí escreve as equações canônicas que formam o sistema de primeira ordem, ou seja, a variação das coordenadas generalizadas no espaço de fases.

$$
\begin{cases}
\dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{p_1}{(1+q_2)^2} \\
\dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 \\
\dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -\nu^2 (1+q_2) sen(q_1) \\
\dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = 2\dfrac{p_1^2}{(1+q_2)^3} - \dfrac{p_1^2}{(1+q_2)^5} + \dfrac{p_1^2}{(1+q_2)} - 4\dfrac{p_1^2}{(1+q_2)^5} + \dfrac{q_2 p_1^2}{(1+q_2)^4} - 2\dfrac{p_1^2}{(1+q_2)^5} + \nu^2 \cos q_1 + \kappa q_2 + \varepsilon q_2^3
\end{cases}
$$

(4)

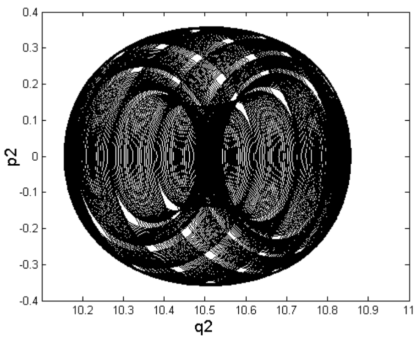

Figura 1: Espaço de fases para o Deslocamento **x** momento radial da massa.

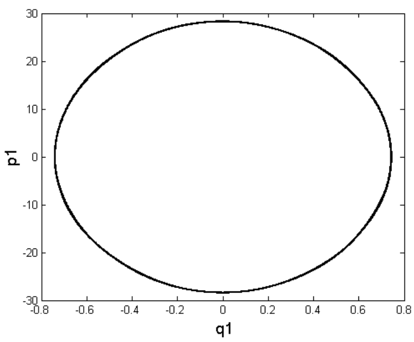

Figura 2 : Espaço de fases, deslocamento angular **x** momento.

2. Discussão dos resultados

Foi obtido a função hamiltoniana para o pêndulo elástico com $u = 0$, essa simplificação modifica o sistema mecânico original, isto é, fica sendo o pêndulo elástico sem excitação vertical. A simulação representada nas figuras 1 e 2 são razoáveis, em vista que, nestas, as condições iniciais foram tomadas para significar que a massa do pêndulo é solta de uma altura determinada por um ângulo inicial de $\pi/4$ e com a mola levemente estirada, a fase transiente foi retirada. Podemos notar (figura 1 e 2) a energia sendo conservada uma característica do sistema hamiltoniano. Se $u \neq 0$ o sistema pode ser colocado na forma $H = H_0 + \delta H_1$, sendo H_0 a função hamiltoniana como em (3) e H_1 a parte que não é uma função hamiltoniana, ela é correspondente a excitação externa suprimida ao fazer $u = 0$.

Um próximo passo nesse trabalho, pode ser considerar $u \neq 0$ e procurar uma solução analítica aproximada usando um método de perturbação adequado.

Referências

[1] E. L. Oliveira, “Análise da dinâmica de um pêndulo elástico com excitação vertical no suporte”, Tese de Mestrado, Ibilce/Unesp, 2006.

[2] V. S. Andrade, N. J. Peruzzi, V. A. Oliveira and J. M. Balthazar, “Modelagem de um sistema dinâmico do tipo pendular”, Série Arquimedes Vol Dois, Anais do DINCON, 2003.

[3] J. E. Villate, “Introdução aos Sistemas Dinâmicos”, Faculdade de Engenharia Portugal, 1993.