

Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal em Treliças Planas Segundo o Método dos Elementos Finitos

Diego Trevisol, Cristiano Gabriel Persch

Universidade do Estado de Mato Grosso - Departamento de Engenharia Civil
78550-000, Campus Sinop, Sinop, MT
E-mail: dtrevisol@hotmail.com

André Luis Christoforo

Depto Engenharia Civil, Universidade do Estado de Mato Grosso, UNEMAT, 78550-000, Sinop - MT

RESUMO

O dimensionamento de estruturas de cobertura do tipo treliça, ou de quaisquer outras estruturas, é realizado em função do conhecimento de algumas variáveis tais como a sua vinculação, as dimensões e formas dos seus elementos componentes, a magnitude e posição das forças aplicadas aos seus nós assim como das propriedades de elasticidade dos materiais utilizados.

Atualmente, os softwares comerciais de análise e dimensionamento estrutural, objetivam em sua totalidade, a determinação dos deslocamentos nodais da estrutura e conseqüentemente, os seus esforços, tensões e deformações. Este trabalho objetiva apresentar um programa computacional (EOTM) que permite calcular o valor do módulo de elasticidade mais adequado para um projeto de estruturas planas do tipo treliça. Depois de calculado o valor do módulo de elasticidade, o programa EOTM calcula também os deslocamentos nodais da estrutura, os esforços solicitantes, as tensões e as deformações nos seus elementos estruturais componentes. Um exemplo de estrutura plana do tipo treliça é apresentado e resolvido segundo programa EOTM.

Segundo o Método dos Elementos Finitos (MEF), o deslocamento em problemas estruturais elásticos é tido como incógnita fundamental, obtido por intermédio da resolução de um sistema de equações lineares, assim como expressa a equação (1), sendo que a sua construção fica em função da disposição da malha e, conseqüentemente, dos nós dos elementos finitos na estrutura.

$$[K]\{U\}=\{F_{ext}\} \quad (1)$$

Na equação 1, $[K]$ representa a matriz de rigidez da estrutura, $\{U\}$ o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura e $\{F_{ext}\}$, o vetor das forças equivalentes nodais externas da estrutura. Neste trabalho, foram utilizados polinômios de grau um para geração das funções de forma criadas segundo a técnica de elementos finitos, sendo estas aplicadas ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para a determinação da matriz $[K]$ e do vetor $\{F_{ext}\}$. Com relação ao emprego do MEF na análise de estruturas, alguns trabalhos podem ser citados, tais como os de Alvarenga e Antunes [1], Rigo [2], Soares e El Debs [3], entre outros.

Neste trabalho, o módulo de elasticidade da estruturas é obtido mediante a resolução da equação

$$f(E) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\{F_{ext_i}\} - \{F_{int_i}\})^2 \quad (2)$$

sendo $\{F_{int}\}$ o vetor das forças nodais que têm como variável independente, o módulo de elasticidade longitudinal.

Em geral, nos projetos de estruturas planas do tipo treliças, apenas um material é utilizado para a confecção dos seus elementos de barra componentes. Para estas situações, na matriz de rigidez de cada elemento finito e, conseqüentemente, na matriz de rigidez da estrutura, o módulo de elasticidade se apresenta como fator comum, estando presente em todos os seus coeficientes. Dessa forma, o primeiro membro da equação 1 pode ser escrito como

$$[K]\{U\} = E \cdot [K^*]\{U\} = \{F_{int}\}, \quad (3)$$

sendo $[K^*]$ a matriz da estrutura que contém a área da seção transversal e o comprimento de cada elemento finito.

A equação 1 ainda pode ser reescrita da seguinte forma

$$[K]\{U\} - \{F_{ext}\} = \{0\} \implies \{F_{int}\} - \{F_{ext}\} = \{0\}. \quad (4)$$

Para a resolução da equação 4, a mesma é colocada sobre a forma de mínimos quadrados (ver equação 2) em que o valor de mínimo encontrado se configura como solução de f . Neste

trabalho, o valor mínimo de f é calculado segundo o Método de Newton com aproximação quadrática, desenvolvido segundo o truncamento da série de Taylor em seu terceiro termo. Optou-se por esta versão do Método de Newton pela eficiência que o mesmo apresenta na determinação de valores de mínimo de funções quadráticas. Independente da estimativa inicial utilizada na equação de recorrência do método, o valor de mínimo, módulo de elasticidade, é obtido em uma única iteração.

Para aplicação do programa EOTM, desenvolvido segundo a plataforma de cálculo do software *Mathcad 2000*, foi-se utilizada uma estrutura do tipo treliça (problema modelo), ver Figura 1, cujos dados físicos e geométricos são apresentados na Tabela 1.

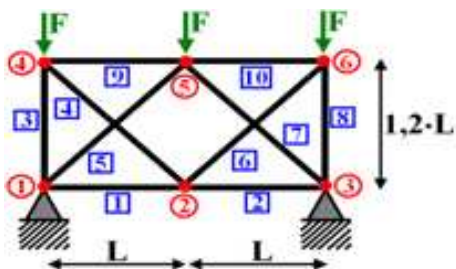


Figura 1: Problema modelo.

Elementos	Área das seções (cm ²)	Comprimento "L"(cm)
1, 2, 9 e 10	30	250
3 e 8	40	Força "F" (kN)
4, 5, 6 e 7	50	60

Tabela 1: Dados do problema modelo.

O valor encontrado pelo programa EOTM para o módulo de elasticidade da estrutura apresentada pelo problema modelo é igual a $2.125,16 \text{ KN/cm}^2$, que em se tratando de estruturas de madeira, este módulo se enquadra na classe das *coníferas*. A Tabela 2 apresenta os valores dos seus deslocamentos nodais, dos esforços normais nas barras e das suas respectivas deformações e tensões atuantes.

Tabela 2: Deslocamentos nodais, força normal, tensão e deformação.

Nó	Deslocamentos (cm)		Elemento	Força normal (kN)	Deformação específica	Tensão (kN/cm ²)
	Direção "x"	Direção "y"				
1	0,0000	0,0000	1	0,0000	0,00000000	0,000000
2	0,0000	-0,2470	2	0,0000	0,00000000	0,000000
3	0,0000	0,0000	3	-70,0000	-0,00082347	-1,750000
4	0,0000	-0,2470	4	0,0000	0,00000000	0,000000
5	0,0000	-0,2179	5	-45,5597	-0,00042877	-0,911195
6	0,0000	-0,2470	6	0,0000	0,00000000	0,000000
			7	-45,5597	-0,00042877	-0,911195
			8	-70,0000	-0,00082347	-1,750000
			9	0,0000	0,00000000	0,000000
			10	0,0000	0,00000000	0,000000

Em se tratando de estruturas planas do tipo treliça, a metodologia aqui utilizada para a determinação do módulo de elasticidade longitudinal se apresenta como um critério de escolha do material mais apropriado a ser empregado em um projeto estrutural.

Palavras-chave: *Otimização, estruturas tipo treliça, Método dos Elementos Finitos.*

Referências

- [1] Alvarenga, R. C. S. S.; Antunes, H. M. C. C. (1994). Otimização de treliças. Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 15., Belo Horizonte, MG. Anais, pp 1699-1708.
- [2] Rigo, E (1999). Métodos de otimização aplicados à análise de estruturas. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.
- [3] Soares, R. C.; El Debs, A. L. H. C. (1997). Otimização de seções transversais de vigas de concreto armado: Aplicação a pavimentos. Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 13., Brasília. Anais, pp 1507-1514.