 ISSN 1984-820X

Análise de Funções Contínuas Não Diferenciáveis Através de Derivadas Fracionárias

Douglas A. Sant' Anna*
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC
09210-170, Santo André, SP
E-mail: douglas.santanna@ufabc.edu.br

Roberto Venegeroles
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC
09210-170, Campus Santa Adélia, Santo André, SP
E-mail: roberto.venegeroles@ufabc.edu.br

RESUMO

A idéia de que toda função contínua seria diferenciável em pelo menos um ponto de seu domínio teve seu fim a partir do exemplo dado por Weierstrass:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \sin(\lambda^n x) \tag{1}$$

onde $\lambda > 1$, $1 < s < 2$ para x real. Curiosamente, $W(x)$ é uma função contínua em toda a reta porém não diferenciável em todo seu domínio. Por três dácadas, após o exemplo dado por Weierstrass e de outros exemplos decorrentes, tais funções eram vistas como meras patologias servindo apenas como contra-exemplos de não-diferenciabilidade, sem relevância prática para problemas físicos. O físico Jean Perrin e o matemático Benoit Mandelbrot foram alguns dos primeiros pesquisadores a trabalhar e incentivar o estudo de tais objetos obtendo muitas de suas aplicações práticas. Como exemplo de tais aplicações, Mandelbrot em [6] descrevia a natureza ressaltando sua característica "irregular". Perrin percebeu que a trajetória descrita por uma partícula executando movimento browniano era um caminho contínuo e irregular (não diferenciável) [2].

Paralelamente ao desenvolvimento do cálculo fracionário, que tem por objetivo generalizar as ordens de derivação e integração, diversas conexões entre a não-diferenciabilidade ordinária de uma função e a dimensão fractal de seu gráfico formam obtidas. Neste trabalho usaremos a definição de Riemann-Liouville para derivadas fracionárias:

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{(q-n+1)}}\, dy \tag{2}$$

sendo n é natural tal que $n = [q] + 1$ e $[\,]$ representa a parte inteira de q com $x > a$. Podemos observar que para q inteiro positivo, obtém-se a n-ésima derivada usual de f.

O gráfico de uma função contínua pode ser suficientemente irregular de forma que seu gráfico seja fractal. É importante ressaltar que muitos fenômenos da natureza, quando observados em sua evolução temporal, apresentam fractalidade [2]. Este fato tem sido foco de muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Apenas para citar um dos exemplos, trabalhos recentes relacionam a fractalidade da frequência cardíaca ao bom estado de funcionamentto do coração [1].

*bolsista CAPES

Nosso objetivo neste trabalho é discutir algumas propriedades e aplicações do uso de derivadas fracionárias de Riemann-Liouville em problemas que envolvam funções contínuas irregulares (não-diferenciáveis ordinariamente). Em particular, pretendemos estudar as conexões entre a dimensão fractal dos gráfico dessas funções e a respectiva ordem de diferenciação fracionária das mesmas - tendo este fato inúmeras aplicações. Para tal fim, escolhemos a função de Weierstrass (1) como protótipo de função contínua e não diferenciável (FCND). Utilizamos para esta função técnicas e resultados de diferenciabilidade fracionária e algumas propriedades específicas, tais como seu expoente de Hölder, com o objetivo de conhecer propriedades locais e de também de verificar a existência de derivadas fracionárias de ordem q a ser especificada.
Palavras-chave: *Derivadas Fracionárias, Função de Weierstrass, Fractais, Funções Contínuas Não Diferenciáveis*

Referências

[1] B. A. Cipra "A Healthy Heart is a Fractal Heart", SIAM, Vol.36, N.7 (2003)

[2] K. Falconer, "Fractal Geometry of Nature", John Wiley and Sons Ltd. Chinchester, 1990.

[3] G.H Hardy, "Weierstrass's non differentiable function", *Trans.Amer.Math.Soc.* (1916) 301-325.

[4] K. M. Kolwankar, "Study of Fractal Structures and Processes Using Methods of Fractional Calculus", Doctoral thesis,University of Pune, 1997.

[5] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, *Pramana*, J.Phys (1997) 48-49.

[6] B.B Mandelbrot, "Fractal Geometry of Nature" W.H. Freeman and Company, New York 1977.

[7] K. S. Miller and B. Ross, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", John Wiley, New York, 1993.

[8] K. B. Oldham and J. Spanier, "The Fractional Calculus", Academic Press, New York, 1974.