 ISSN 1984-820X

# Aplicação do Método das Diferenças Finitas na resolução de Equações Diferenciais Parciais Elípticas referente à determinação das temperaturas em pontos interiores de uma chapa

**Djeison Benetti**
Depto de Matemática, UNEMAT
78550-000, Sinop, MT
E-mail: djeisonbenetti@yahoo.com.br

**André Luís Christoforo**
Universidade do Estado do Mato Grosso - Departamento de Engenharia Civil
78550-000, Sinop, MT
E-mail: alchristoforo@yahoo.com.br

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo, apresentar e aplicar o Método das Diferenças Finitas na resolução de Equações Diferenciais Parciais, em particular, as elípticas. *A forma de obtenção dos operadores de diferenças finitas é baseada na diferenciação de funções polinomiais interpolativas, diferentemente da forma usual, onde os operadores são determinados segundo a expansão em série de Taylor*. Pelo exemplo resolvido, constata-se que o método é de simples aplicação, além de se apresentar como uma metodologia alternativa no desenvolvimento dos operadores de diferenças finitas. Por outro lado, a precisão dos resultados depende fortemente da malha ou da discretização do domínio do problema.

Neste trabalho, o Método das Diferenças Finitas é aplicado na resolução de uma EDP elíptica. Exemplos de aplicação do método das diferenças finitas na solução de EDP`s hiperbólicas e parabólicas podem ser vistas em [4]. Outras variações do método das diferenças finitas podem ser encontradas nos trabalhos em [3] e, mais especificamente, em relação a discretização de Equações Diferenciais Parciais, em [1]. Exemplos de aplicações de métodos aproximados para equações do tipo hiperbólicas são encontrados em [2].

O Método das Diferenças Finitas destaca-se em razão da simplicidade na forma como os operadores diferenciais presentes nas equações diferenciais são aproximados. Como problema modelo, aplicou-se o método na resolução de uma EDP referente à determinação do fluxo de calor no interior de uma chapa. A EDP referente ao problema aqui estudado é de 2ª ordem, em razão de serem as que mais freqüentemente aparecem em problemas da física, engenharia e cuja forma geral é expressa por:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \mathrm{u},\mathrm{D}\right) \qquad (1)$$

Os operadores de diferenças finitas desenvolvidos para a aproximação das derivadas de funções reais de uma variável são deduzidos com base em conceitos de interpolação polinomial. Em particular, aqui são desenvolvidos operadores de diferenças finitas centrados. Como a EDP que retrata o problema do fluxo de calor na chapa (problema modelo) é a de segunda ordem, torna-se necessário o cálculo do operador de diferenças que aproxima a derivada segunda da função. É importante observar que o operador de primeira derivada envolve o conhecimento da função em dois pontos, enquanto que o de segunda envolve o conhecimento da função em três. Ambos os operadores exprimem o mesmo grau de precisão em virtude da aproximação do polinômio interpolador, cujo resto é da ordem do espaçamento ao quadrado O($h^2$).

Como exemplo de EDP elíptica, tem-se a equação de bidimensional de *Poisson*, no qual uma particularização da equação de Poisson é dada pela equação de Laplace que, em condições de contorno constantes, representa a distribuição de uma determinada grandeza física em uma superfície bidimensional.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0 \qquad (2)$$

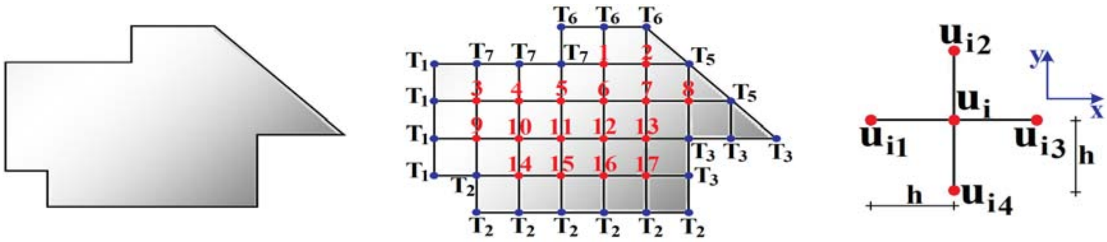


**Figura 1:** Chapa sujeita a diferentes temperaturas em seu contorno e sua respectiva discretização.

Para a resolução da EDP, torna-se necessário a discretização do domínio da chapa. A malha utilizada para a determinação das temperaturas internas da chapa confere um conjunto de 17 incógnitas, assim como ilustra a figura acima. Em particular, o problema modelo tem a temperatura como grandeza física associada. A figura apresenta a chapa, elemento plano de espessura desprezível, sujeita a temperaturas no seu contorno advindas de fontes de calor: $T_1$ = 1º C, $T_2$ = -1º C, $T_3$ = 4º C, $T_4$ = 2º C, $T_5$ = 3º C, $T_6$ = 5º C e $T_7$ = 6º C.

Optou-se por determinar os operadores de diferenças finitas para funções reais de uma variável livre e, conseqüentemente, estender essa metodologia para o cálculo aproximado dos operadores de derivadas parciais para funções reais de duas ou mais variáveis independentes. Assim, para as variáveis $u_{i1}$, $u_{i2}$, $u_{i3}$ e $u_{i4}$, as equações em 2 ganham a seguinte redação:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_i \approx \frac{u_{i1}-2u_i+u_{i3}}{h^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_i \approx \frac{u_{i2}-2u_i+u_{i4}}{h^2} \tag{3}$$

$$\frac{u_{i1}-2u_i+u_{i3}}{h^2}+\frac{u_{i2}-2u_i+u_{i4}}{h^2}=0 \Rightarrow -4u_i+u_{i1}+u_{i2}+u_{i3}+u_{i4}=0 \tag{4}$$

Utilizando-se a equação 4 para cada um dos 17 pontos internos da chapa (Figura 1), gera-se um sistema de 17 equações lineares a 17 incógnitas. Procedendo-se assim com todos os pontos interiores da malha, chega-se a um sistema de equações do tipo $AB = C$, no qual a matriz $A$ dos coeficientes é do tipo simétrica e pentadiagonal. Para a resolução do sistema de equações lineares foi utilizado o método da Eliminação Gaussiana por meio do *software Open Source VCN*. A solução obtida foi:

$$B^T = (4,625;\ 4,029;\ 2,952;\ 3,633;\ 3,832;\ 3,579;\ 3,463;\ 3,366;\ 1,175;\ 1,748;\ 2,117;\ 2,368,\ 2,881;0,067;\ 0,520;\ 0,896;\ 1,694)$$

Por fim, a idéia de se desenvolver os operadores de diferenças finitas com uso da derivada das funções interpolativas mostrou ser de simples compreensão, evitando o conhecimento prévio sobre Séries de Taylor. O Método das Diferenças Finitas apresentou-se como uma ferramenta matemática de simples manipulação, podendo ser aplicado à resolução de uma EDP qualquer. Para a obtenção de resultados mais acurados, torna-se necessário o aumento da malha, e conseqüentemente, do tamanho do sistema de equações lineares.

**Palavras-chave:** *Equações Diferenciais Parciais, Método das Diferenças Finitas, Equações Diferenciais Elípticas.*

## Referências Bibliográficas

[1] J. A. Culminato; M. Meneguetti Junior. "Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas". ICMC-USP, São Carlos, 1999.

[2] M. D. Martinez. "Esquemas Numéricos para Equações Hiperbólicas e Aplicações". Dissertação de Mestrado, ICM-USP, São Carlos, 2001.

[3] F. R. Mittelbach. "Métodos das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos". Dissertação de Mestrado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.

[4] D. Sperandio; J. T. Mendes; L. H. M. Silva. "Cálculo numérico: Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos". São Paulo: Prentice Hall, 2003.